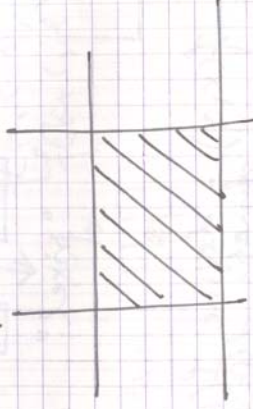


INTRODUCERE

Modelul matematic al imaginii

- $f(x, y)$ - semnale definite spațial.
 - o imagine în tonuri de gri se poate modela cu $f(x, y)$.
- modelul poate fi în $L^2(\mathbb{R}^2)$.
(funcții de energie (repartizată în spațiu) finită).
- Spațiul $L^2(\mathbb{R}^2)$ poate fi limitat pe un domeniu D :
 $\Rightarrow$ spațiul $L^2(D)$:



- obiectele de obiecte poate fi reprezentat ca un Spațiu Banach (normat). $\checkmark$ vectorial.
- norma de spațiu Hilbert:

$$\|f\| = \sqrt{\int_D |f|^2 dx}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_D f \cdot g dx$$

PROCESAREA IMAGINILOR

Mihai Ivanovici

4261.

- compunerea (faza și diverse modele).

Cazul modelului continuu (analogic)

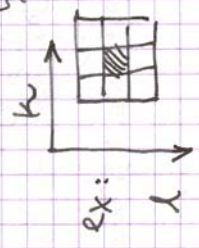
$$f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

- transformări ale imaginilor:

- punctuale: $f(x_0, y_0) \rightarrow g(x_0, y_0) = \mathcal{L}(f(x_0, y_0))$
- de vecinătate:

$$g(x_0, y_0) = \mathcal{L}(\text{valorile dintr-o vecinătate a lui } (x_0, y_0)).$$

$$g(k, l) = \mathcal{L}(f(k, l), f(k-1, l), f(k+1, l), f(k, l-1), f(k, l+1), f(k+1, l-1), f(k-1, l+1), f(k+1, l+1), f(k+1, l-1)).$$



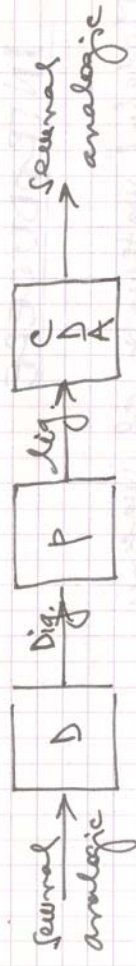
- integrale - de obicei transformări liniare.

Obs: cele punctuale sînt în gn. neliniare.
cele de vecinătate: fi-așa - fi-așa.

Transformata Fourier bidimensională

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-j(ux + vy)} dx dy.$$

Obs: există și T.F. n-dimensionale:

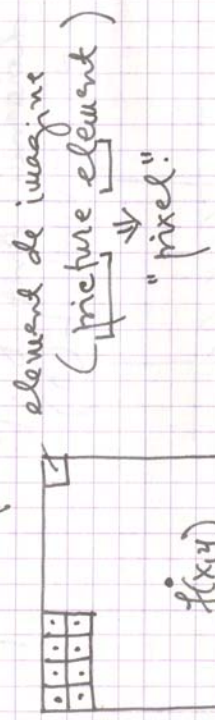


- prelucrări numerice

digitale - în ac. caz se calculează cu valori aproximative.
(din cauza reprezentării).

- teoria - modele de funcții continue

- în practică: funcții eșantionate



- funcția continuă $f(x, y)$ devine $f(k, l)$ punctie discretă.

- tipuri de procesări de imagini:

- îmbunătățire (enhancement) - nu...
- restaurare - cunoașterea modelului de degradare
- refacerea imaginilor din proiectii
- segmentare = separarea obiectelor ce compun imaginea

- operații de analiză:

- clasificări
- recunoaștere de forme.

$$F(\bar{u}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{x}) \cdot e^{-j\bar{u}\bar{x}} d\bar{x}$$

$$F[f(x,y)] = F(u,v)$$

- lineare deoarece este tot o transformare liniară:

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha Ff + \beta Fg$$

$$f(x,y) \rightarrow f(x-x_0, y-y_0) \rightarrow \text{(funcția translată)}$$

$$f(x-x_0, y-y_0) = f'(x,y)$$

$$F'(u,v) = \iint f(x-x_0, y-y_0) \cdot e^{-j(ux+vy)} dx dy$$

$$= \iint f(x,y) \cdot e^{-j(xu+yv+x_0u+y_0v)} dx dy$$

$$= e^{-j(x_0u+y_0v)} \cdot F(u,v)$$

Transformata Fourier inversă

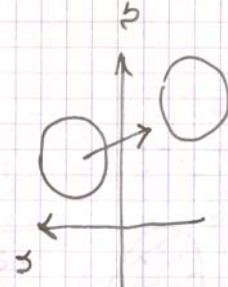
$$f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint F(u,v) \cdot e^{j(ux+vy)} du dv$$

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \cdot e^{-jux} dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u,y) \cdot e^{-juy} dy$$

$$f(u,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) \cdot e^{jvy} dv$$

- translația spectrală: ex:



$$f'(x,y) = f(x,y) \cdot e^{j(ux+vy)}$$

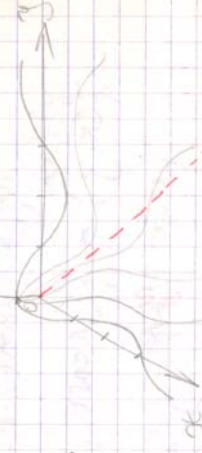
• funcție "cos" bidimensională

$$\cos(ux+vy)$$

$$\text{ex: } u=0 \rightarrow \cos(vy)$$

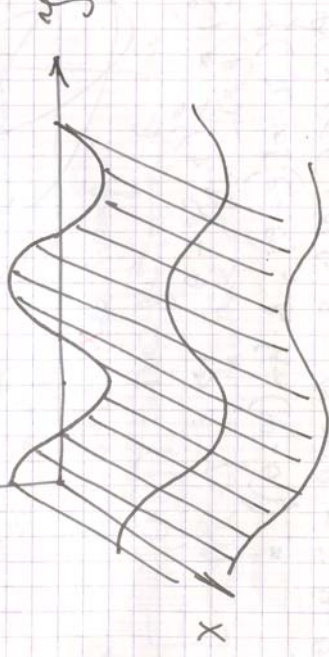
$$\cos(ux+vy)$$

$$u=v=1$$



$$\cos(vy)$$

procr.
intrinsec

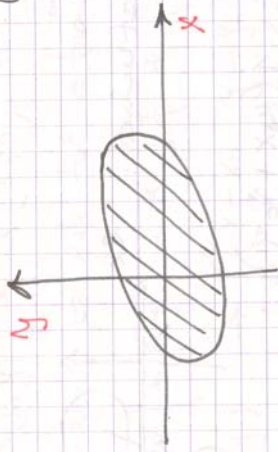


- de calculat perioada (intrinsecă) - pt. $u, v \neq 0$.

Proprietăți transformate Fourier bidimensionale

fie $f(x, y)$ - având unuștel "supor"

(mulțimea punctelor în care f este nenulă, diferit de 0)

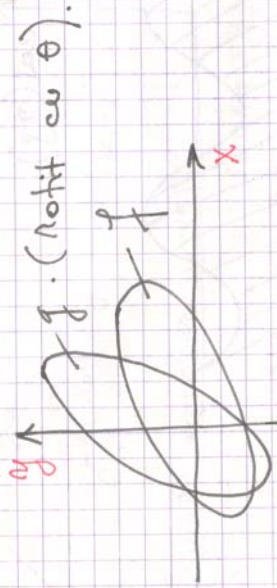


- fie g - funcția rotită a funcției f .

$x, y \rightarrow R, \varphi$ - coordonate polare

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos \varphi \\ y = R \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

$$f(x, y) = f(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = f'(R, \varphi).$$



$$\Rightarrow g'(R, \varphi) = f'(R, \varphi - \theta) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(R \cos(\varphi - \theta), R \sin(\varphi - \theta)) = \\ &= f(x \cos \theta + y \sin \theta, y \cos \theta - x \sin \theta) \end{aligned}$$

4.

$$G(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x \cos \theta + y \sin \theta, y \cos \theta - x \sin \theta) \cdot e^{-j(u x + v y)} dx dy =$$

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = x' \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = y' \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \cdot \sin \theta \\ 1 \cdot \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ x = x' \cos \theta - y' \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x', y') \cdot e^{-j(u x' \cos \theta - y' \sin \theta + x' \sin \theta + y' \cos \theta)} dx' dy' =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x', y') \cdot e^{-j[x'(u \cos \theta + v \sin \theta) + y'(-u \sin \theta + v \cos \theta)]} dx' dy'$$

$$= F(u \cos \theta + v \sin \theta, -u \sin \theta + v \cos \theta).$$

②: Dacă notăm spectrul imaginii $f(x, y) \Rightarrow \hat{f}$ se poate și spectrul în același sens $\hat{f}$ din aceeași imagine.

- obs: 2 modele de imagini: $\hat{f}$ (color)

$$f(x, y) : \mathbb{DC} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ sau } \mathbb{R}^3$$

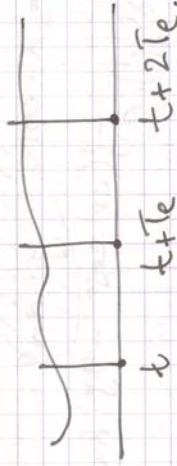
$$f(k, \ell) - \text{provine din } f(x, y) \text{ prin eșantionare}$$

Teorema eșantionării 2D

- t. es. unidim.:

dacă $f(t)$ și $F(\omega) = 0$ pt. $|\omega| > \Omega$ atunci $f(t)$ poate fi refăcut din eșantioanele sale:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(kT_e) \cdot \frac{\sin \omega_0(t - kT_e)}{\omega_0(t - kT_e)}$$

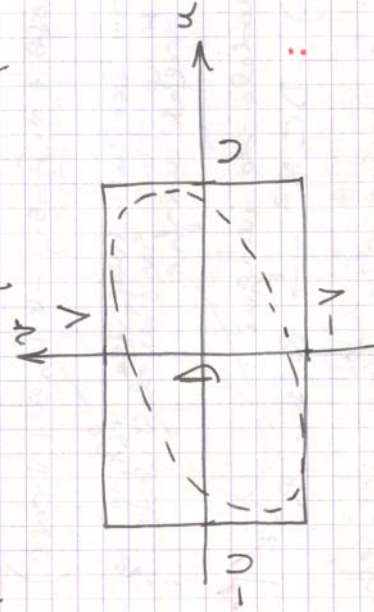


$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_e}$$

$$f_e = \frac{1}{T_e} > 2f_{\max}$$

$$\frac{1}{T_e} > 2 \cdot \frac{\Omega}{2\pi} \quad \Omega < \frac{\pi}{T_e}$$

⑦: $f(x, y)$ - are un spectru de forma:



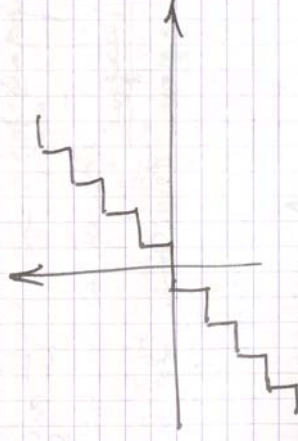
$$F(u, v) = 0 \text{ pt. } (u, v) \notin D.$$

$$f(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(x - kx_0, y) \cdot \frac{\sin U(x - kx_0)}{U(x - kx_0)} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(x - kx_0, y - ly_0) \cdot \frac{\sin U(x - kx_0)}{U(x - kx_0)} \cdot \frac{\sin V(y - ly_0)}{V(y - ly_0)}$$

↳ propoziția care ne trece din continuu în domeniul discret.

A doua aproximație: o val. analitic se transformă într-o val. discretă printr-un proces de cuantizare.



- de câte eșantioane avem nevoie pt. a reprezenta un spectru cu o anumită precizie?
- o culoare = o an. curbă spectrală.
- avem 3 feluri de traductori $\Rightarrow$ spațiul imaginii (teoretic n-dimensional) se proiectează pe 3 plane: $R, G, B \Rightarrow$ sint coeficienți 3 dim. pt. a reprezenta culorile.
- la nivelul ochiului are loc o reducere a informației de la nivelul traductorilor retinai.
- și în alte modele de culori în care distanța între 2 vectori să fie egală cu distanța percepută între acei 2 vectori - în spațiul real al culorilor.

Intr. ce
Constanta culorilor $\rightarrow$ compensarea variabile de culoare datorate diferențelor de iluminare
OBS: 3 componente este minimul de reprezentare a culorilor.

Modelarea matematică a imaginii

< modele deterministe

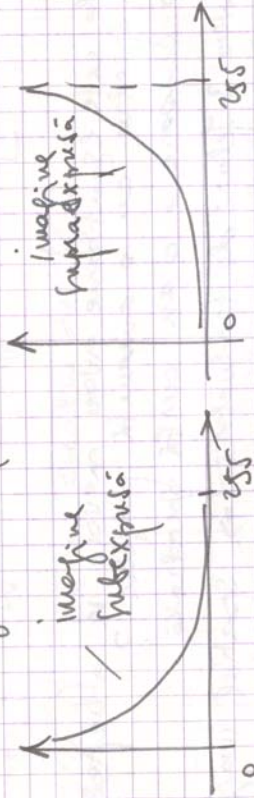
modele statistice $\Rightarrow$ val. variabilele sunt variabile aleatoare

- vom lucra cu cimpuri aleatoare
(nu cu procese aleatoare care au o desfășurare temporală)
- au o desfășurare spațială.

Histograma unei imagini

- o imagine are aprox. 1 milion de pixeli.
(egantidno).

- ex: histogramă: pe 256 de valori.



- pixelii au valori corelate $\Rightarrow$ ipoteză simplification
valorile sunt independente (ipoteză este totuși falsă)



atunci histograma reprez. densitate de probabilitate pt. imaginea respectivă.

Dacă v.a. sunt indep atunci ac. f. de repartiție nu ne dă informația vătută.
pt. 1, 2, 3 realizări: - informația medie este proporțională cu entropia lui.

Sursa de informație: adică histograma ne dă informație maximă dacă "implicăm" valorile pe toate valorile din domeniu $\Rightarrow$ ex. i.v. egalizare de histogramă.

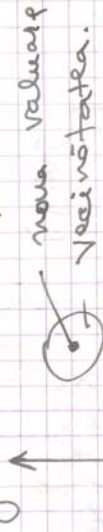
Aveam o f. de repartiție, aveam a-2-a f. de repartiție, nouă se reprez. histograma egalizată pt. este funcție de mărimea f. de repartiție. $\Rightarrow$ care este acea funcție?

Problema este mai dificilă în dom. discret. Egalizarea în dom. discret este mai degrabă o presupunere pe întreg domeniul a val. decât o egalizare reală ca în dom. continuu.

1° - prelucrări punctuale: $f(x, y)$ - pt. $x \times y$: avem o funcție care "mută" val. din $f(x, y)$ în altă valoare.

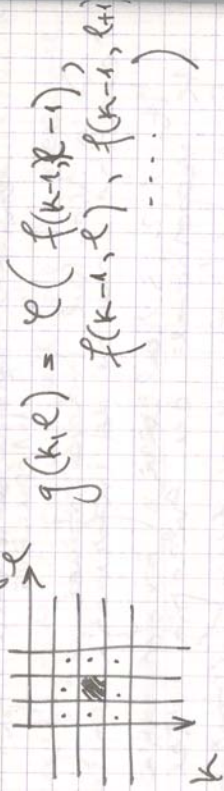
$$f(x, y) [f(u, v)] \Rightarrow \varphi(f) = g.$$

2° - prelucrări de vecinătate: Noua valoare în punctul $g(x, y)$ se obține ca un "c":
 $g(x, y) = \varphi(f \text{ în vecinătatea lui } (x, y)).$



- în cazul imaginii continue.

- în cazul imaginii discretizate.



$$g(k, l) = \mathcal{L} \left(\begin{matrix} f(k-1, l-1), \\ f(k-1, l), f(k-1, l+1), \\ \dots \end{matrix} \right)$$

5° - prelucrări integrale - descriere de transformări integrale.

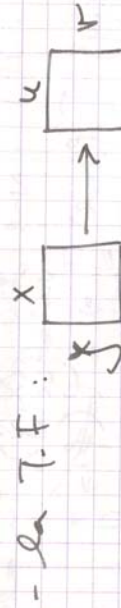
[ex: T. Fourier bidimensionale]

- într-o parte numai liniare.

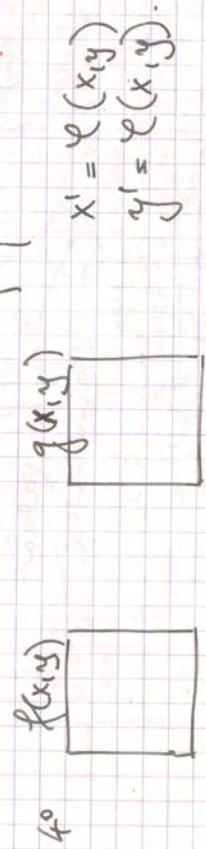
4° - transformări geometrice:



3° - dar au aceeași semnificație (coordonatele x, y)

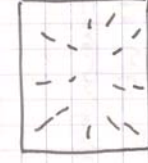
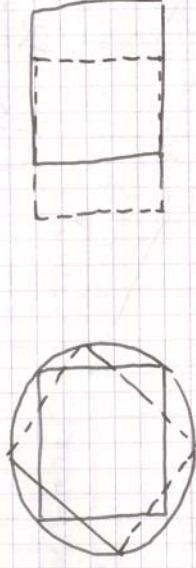


Obs.: $F(u, v) \cdot H(u, v) = G(u, v)$ - pt. filtrare unidim.
 $F(u, v) \cdot H(u, v) = G(u, v)$ - filtrare bidim.
 = transf. punctuale?!

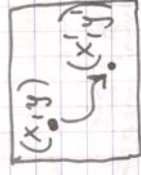


$\mathcal{L}$ - poate pătrî sau nu domeniul de definiție

- ex. la o rotație: sau la o translație



- imaginea se "sînge" spre valor. determinati o altfel de transformare conforma. (adică păstrează domeniul).



$$g(x', y') = f(x, y)$$

$$(x, y) \rightarrow (x', y') = \Phi(x, y)$$

$$\Rightarrow g(x, y) = f(\Phi^{-1}(x, y))$$

PRELUCRĂRI PUNCTUALE

$$g(x, y) = \mathcal{L}_{(x, y)} (f(x, y)) - \text{adică } \mathcal{L} \text{ depinde de } (x, y)$$

$$= \mathcal{L}(f(x, y), x, y)$$

(asta se întîmple cînd facem o filtrare a spectrului)
 sau $f(x, y) \cdot h(x, y)$.

Prelucrări punctuale care depind exclusiv de valoare.

PRELUCRĂRI DE NECINĂTATE

Filtrarea liniară a imaginilor

- operatori de vecinătate $\Rightarrow$ prelucrări de vecinătate.

- operatori punctuali

- de vecinătate - val. modificată
a unui pixel în funcție
de vecinătatea lui
sau imaginea inițială.

integrali



Operator liniar = un op. care respectă
principiul superpoziției.

- dacă avem 2 imagini: $f_1(u, v)$ și $f_2(u, v)$
și $a, b \in \mathbb{R}$, atunci:

$$O(a f_1 + b f_2) = a \cdot O(f_1) + b \cdot O(f_2).$$

Exprimă unui filtru liniar se def. astfel:

dacă $f(u, v)$ - imaginea originală

$g(u, v)$ - imag. transformată

$$u = 0, M-1$$

$$v = 0, N-1$$

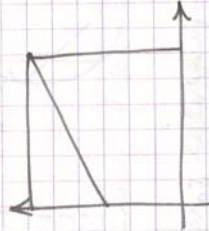
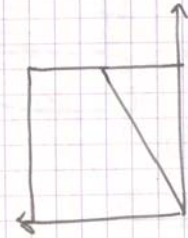
atunci:

$$g(u, v) = \sum_{(k, l) \in W} w_{kl} \cdot f(u-k, v-l)$$

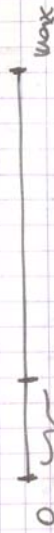
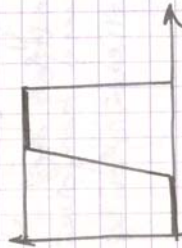
unde W = o structură de puncte care definește
vecinătatea unui pixel, iar

w_{kl} = sint constante care s.n.
coeficienți de filtrare

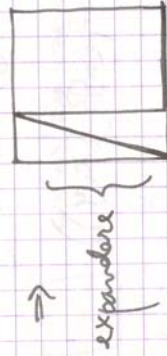
- frecvența $\Rightarrow$ nu are loc
nici o transformare



ex: tonografie computerizată.
standard: 11 bit = 2048 niveluri

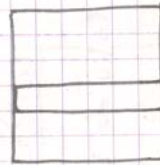


dacă vrem să vedem toate valorile
de aici și numai acestea:



$\Rightarrow$ expansiune

- imagini
- cu tonuri de gri
- color
- multispectrale.



Un filtru liniar este definit de vecinătatea W a fiecărui pixel și de coeficienții w_{kl} . El poate fi specificat prin matrița unei matrițe T , care s.n. mască de convoluție.

(mască de filtrare).
- caracterizată - de formă, coef. și origine.

ex:
$$T = \begin{bmatrix} w_{-1,-1} & w_{-1,0} & w_{-1,1} \\ w_{0,-1} & \boxed{w_{0,0}} & w_{0,1} \\ w_{1,-1} & w_{1,0} & w_{1,1} \end{bmatrix}$$

Obs.: forma în gn - pătrată, de dim. impară.
- origine: $w_{0,0}$.

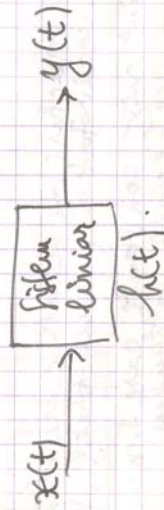
Filtrarea liniară poate fi descrisă astfel:
(operația de...)

- Se înmulțesc mășca de convoluție peste fiecare a.i. din imaginea originală.

- pt. fiecare pixel al imaginii originale
a.i. originea măștii să cadă peste pixelul considerat
apoi se fac toate produsele între coeficienții măștii și valorile pixelilor peste care s-au înmulțit
aceștia, iar suma acestor produse reprezintă noua valoare a pixelului considerat.

(s.n. tehnica ferestrei glisante)

↑ operația descrisă = convoluție bidimensională.
- cazul convoluției unidimensionale:



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) d\tau$$

↑ cazul continuu.
↓ cazul discret.

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m) \cdot x(n-m)$$

(= -∞) cazul general

$$= \sum_{m=0}^{M-1} h(m) \cdot x(n-m) - \text{cazul practic. (restul coef. sunt zero)}$$

Alegerea coeficienților filtrării.

Filtre de netezire

- echivalente FTJ

- FTJ - folosite în gn. pt. eliminarea zgomotului (care este de bandă largă).

- în general informația în principal de interes este în componentele de joasă frecvență

- prin filtrare TJ se "face" zgomotul - care va avea putere mult mai mică (în realitate se "face" și puțin din semnalul util).

- pt. imagine - scopul principal = reducerea puterii zgomotului în imagine.

Modelul cel mai utilizat în : zgomotul este aditiv și alb.

- pt. o imagine $f(i,j) \Rightarrow$

$$f(i,j) = f(i,j) + n(i,j)$$

imagine curată
perturbarea = zgomot (este independent față de imagine).
= imagine cu "păce"

potre:

n = semnal staționar (comportamentul statistic nu depinde de i și j).

$\bar{n} = 0$ = mediu

σ_n^2 - dispersia

varianța

$$\overline{n(i,j) \cdot n(i,j)} = \begin{cases} \sigma_n^2 & i=j \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

v.a. indep.

⇒ FTJ - reduce cantitatea de zgomot din imagine.

Condiția de normare a coef. filtrului de netezire

* componenta continuă nu trebuie să fie alterată de către filtru.

- condiția de normare se deduce impunând condiția de val. unit. (*).

cu alte cuvinte, filtrul să conserve luminanța medie a imaginii.

$$\begin{aligned} f(i,j) &= f(i,j) = A \quad \forall i,j \\ \Rightarrow g(i,j) &= A - (g = \text{imaginea filtrată}). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \sum_{(k,l) \in W} w_{kl} \cdot A \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{(k,l) \in W} w_{kl} = 1}$$

- condiția de normare pt. FTJ.

$$w_{kl} \geq 0$$

Cel mai simplu ex. de FTJ (de netezire) este filtrul de mediere.

10.

Filtrul de mediere

- toți coef. sunt egale.

- mărimea unui f. de med. 3x3:

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

5x5:

1/25	1/25			
1/25				

Efectul filtrului de mediere asupra unei imagini cu zgomot:

$$f(i,j) = f(i,j) + n(i,j) \quad \forall i,j$$

$$N \times N \quad w_{kl} = \frac{1}{N^2} \quad \forall k,l, \quad N = 2k+1 \quad (\text{impar}).$$

$$\text{notăm } N^2 = P.$$

$$g(i,j) = \sum_{(k,l) \in W} w_{kl} \cdot f(i-k, j-l) =$$

$$= \sum_{(k,l) \in W} \frac{1}{P} \cdot f(i-k, j-l) + \sum_{(k,l) \in W} \frac{1}{P} \cdot n(i-k, j-l).$$

ce-a treia din termenul util

ce-a doua din termenul util
neste (i,j) filtrate.

$$\mu_f(i,j) = \sum_{(k,l) \in W} \frac{1}{P} \cdot n(i-k, j-l)$$

$$\mu_f(i,j) = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P \mu_i$$

μ_i - eșantioanele
(P la numărul
de eșantioane din
vecinătate)

$\mu_f(i,j)$ = fel. o var. aleatoare
(medie de v.a.)

$$\Rightarrow \text{media} = \overline{\mu_f(i,j)} = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \mu_i = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \bar{\mu}_i = 0$$

- varianța eșantionului filtrat:

$$\sigma_{mf}^2 = \frac{\overline{\mu_f^2(i,j)}}{\left(\frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \mu_i\right)^2} = \frac{1}{P^2} \cdot \sum_{i,j=1}^P \mu_i \mu_j = \frac{1}{P^2} \cdot \sum_{i,j=1}^P \bar{\mu}_i \bar{\mu}_j$$

dacă $\begin{cases} i \neq j & \mu_i, \mu_j \text{ - v.a. indep.} \\ i = j & \mu_i, \mu_j = \bar{\mu}_i = \bar{\mu}_j = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{\mu_i \mu_j}{\mu_i^2} = \frac{\bar{\mu}_i \bar{\mu}_j}{\bar{\mu}_i^2} = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2} = \sigma_n^2$$

$$= \dots = \frac{P \cdot \sigma_n^2}{P^2} \Rightarrow \sigma_{mf}^2 = \frac{\sigma_n^2}{P}$$

$$\sigma_{mf} = \frac{\sigma_n}{N}$$

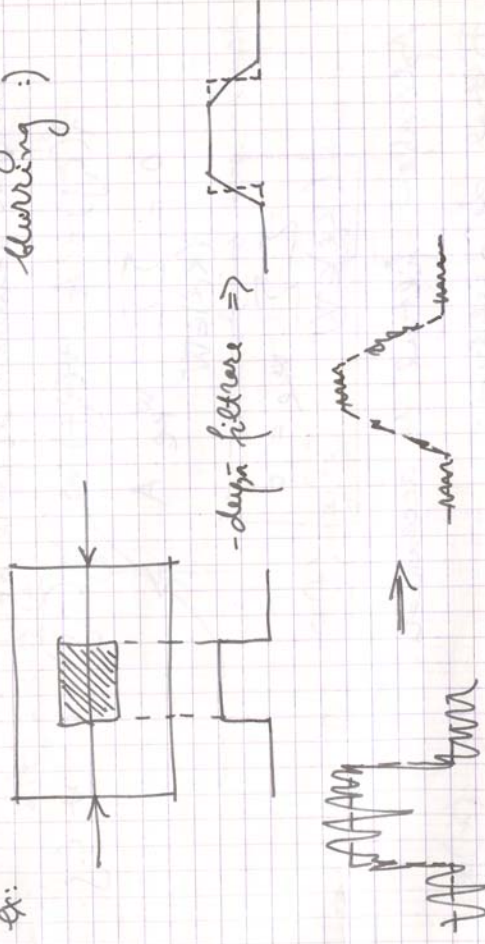
- puterea eșantionului scade de P ori (N^2 ori)
(varianța scade de P ori $\Rightarrow$ valori
mult mai apropiate)

Avantaj - și semnalul util are de suferit.

- filtrarea este dezințită în zonele în care
(de mediere) imaginea conține schimbări bruște
(variații, tranziții, etc.).

$\Rightarrow$ apare un fenomen de "întețitoare"
(de "blurring")

ex:



- d.p.d.v. al zgomotului - este utilă o mască mare
 - d.p.d.v. al imaginii - este utilă o mască mică.
- ©. - felul de mediere nu se prea folosește.

Alte nuclee de convoluție:

$$\frac{1}{16} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- însă toate au în principal același rezultat.
 $\rightarrow$ în general se fol. filtre adaptive.

Filtrarea pece-pus

- componente de frecvență înaltă = variabile tusek (în imagine).

Condiția de volumare a coef.

- se deduce impunând condiția ca conv. conținut a semn. să nu treacă prin filtru (să fie complet atenuată de către el.)

$$f(i,j) = A \quad \forall (i,j) \Rightarrow g(i,j) = 0 \quad \forall i,j.$$

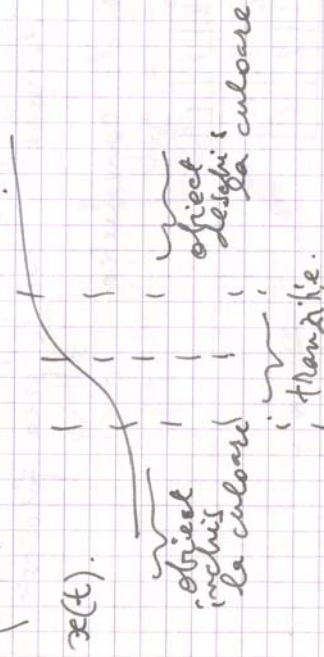
$$0 = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}} w_{kl} \cdot A \Rightarrow$$

$$\sum_{(k,l) \in \mathbb{N}} w_{kl} = 0$$

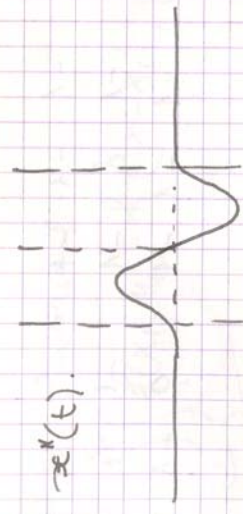
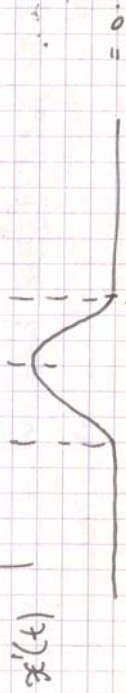
Aplicație - filtrul de accentuare.

Filtrul de accentuare

- nu este FTS, ci folosește filtrarea TS. pt. ex: fie cazul unidimensional.



- luăm prima derivată a semnalului.



Dacă scădem un anumit procent $x''(t)$ din $x(t)$.

$$\Rightarrow x(t) - k \cdot x''(t) \quad \text{— inițial}$$

— tranziția devine mai abruptă.

$$x'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \text{cârlă continuă.}$$

$$x(n) \Rightarrow$$

$$x'(n) = x(n) - x(n-1) \Rightarrow \text{usca unidimensională de filtrare.}$$

$$\text{sau } x'(n) = x(n+1) - x(n).$$

sau

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x''(n) = x(n+1) - 2x(n) + x(n-1)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Obs. fiind cazul discret $\Rightarrow$ 3 uai multe moduri de aproximare.

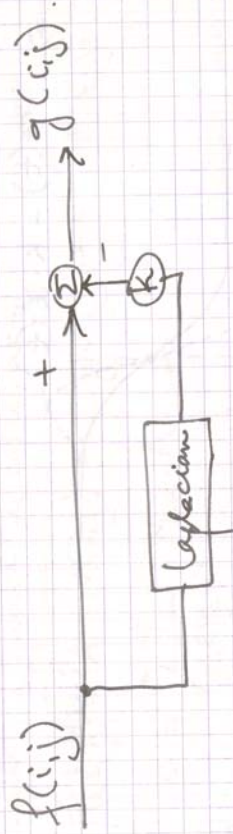
• derivata a $\bar{t}-a$ = Laplacian.

Măști binom.

1	-2	1
-2	4	-2
1	-2	1

-1 -1 -1 0 -1 0
-1 8 -1 -1 4 -1
-1 -1 -1 0 -1 0

⇒ filtrul de accentuare

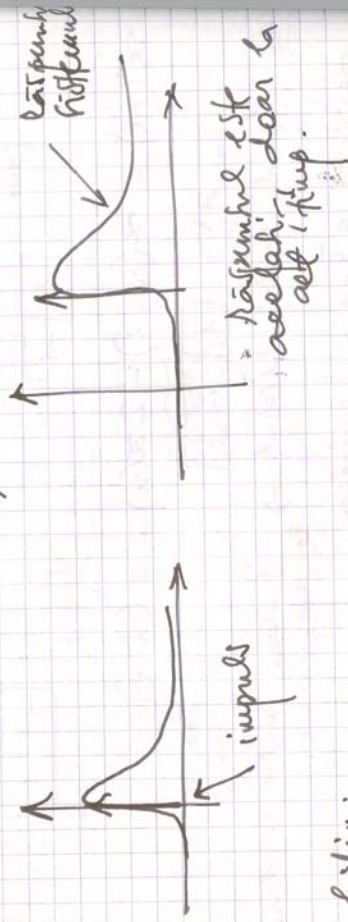


op. de vecinătate / liniară

$$\int \lambda(\tau) \cdot h(t, \tau) d\tau$$

dacă sistemul este invariant în timp

$$\int \lambda(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$



- filtru:

$$g(x,y) = \iint f(x_1,y_1) \cdot h(x,y,x_1,y_1) dx_1 dy_1$$

- ft. sist. invariant:

$$\iint f(x_1, y_1) \cdot h(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1$$

integrals de convoluție bidim.

$$\iint dx dy: \sum_k \sum_l \underbrace{f(k,l)}_{\text{valabilă pt. sist. invariante în timp}} \cdot h(i-k, j-l) = g(i,j)$$

- Dacă $h(2 \text{ var.})$ este "nucleu veie":

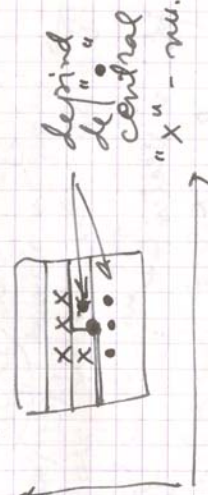
- causalitate spațială nu există.

(dacă avem un punct luminos, el va radia):



3 ni modele cauzale:

la TV:

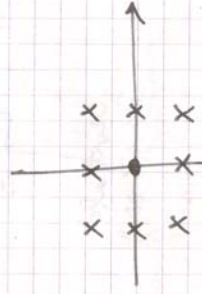


**.

$$h(0,0) = 0$$

$$h(i,j), |i|, |j| \leq 1$$

⇒ nucleu de 3x3.



• dacă $|i|, |j| \leq 2 \Rightarrow$ nucleu 5×5 .

Când nucleul are 5 elemente:

$$\sum_{k,l} f(k,l) \cdot h(i-k, j-l)$$

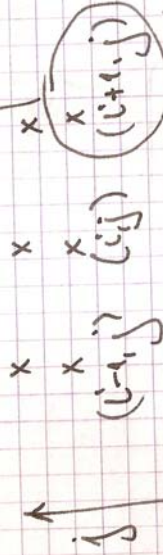
(i, j sunt fixate)

dacă $k = i, i-1, i+1 \rightarrow$ prima coordonată $0, 1, -1$.

$$l = j, j-1, j+1$$

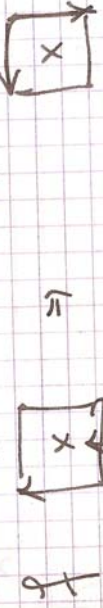
dacă $k, l \neq i, j$ cu mai mult de unu
 $\Rightarrow$ argumentele sunt mai mult de 1
 $\Rightarrow h = 0$.

Prima se reduce la calc. a 3 termeni
 $pt. i, j$.



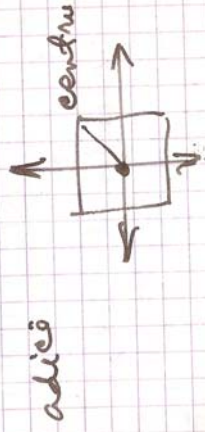
se înmulțesc cu $h(-1, 0)$

pt. o vecinătate:



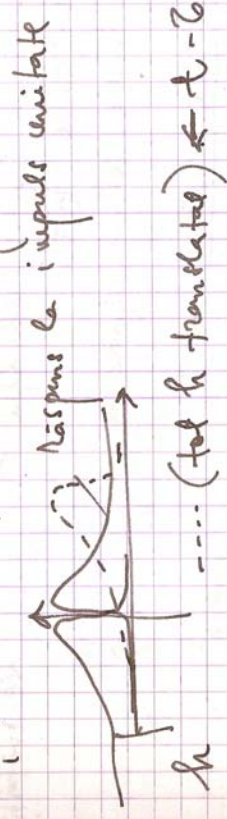
$\Rightarrow$

centrală în x



adică

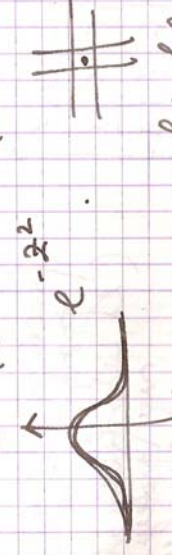
- h_i în cazul unidimensional la fel:



Imaginile în g. sunt însoțite de zgomol:

$$v(x, y) = i(x, y) + z(x, y)$$

- o ipoteză: este ca pixelii din vecinătatea unui pixel (fapt pe o definiție Gaussiană):



$\Rightarrow$ concluzia $\Rightarrow$ se fol. filtre liniare.

- însă în realitate zgomotul este de tip "sare și pipet".
 $\Rightarrow$ zgomotul are amplitudine mare (puncte albe și puncte negre).

- în g. influența are nivelurile între 5% și 95%, iar zgomotul: 0 sau 255.

zgomotul are o distribuție de forma:



$\rightarrow$ opțiune nu mai este filtrul linear.



- pt. un filtru median - punctul "vizibil este" imaginăa în jurul lui în toate direcțiile în care intră.

- dacă vrem să eliminăm acest punct $\Rightarrow$

Filtre de ordine

- ac. filtre nu sînt liniare.

- pt. un filtru linear:

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g).$$

ex: notăm val. pixelilor: $v_0, v_1, \dots, v_8 = v_k$

4	3	2
5	0	1
6	7	8

- facem abstracție de poziția lor în spațiu (la un filtru linear nu trebuie să ținem ap. lucr.).

$$v_k \rightarrow v(n) \quad k=0,8$$

$$\Downarrow \quad v(0), v(1), v(2), \dots, v(8)$$

$$\text{unde } v(0) \leq v(1) \leq v(2) \leq \dots \leq v(8).$$

un filtru linear:

$$\text{pt. } x_1, \dots, x_n \Rightarrow x(1), \dots, x(n)$$

$$y_1, \dots, y_n \Rightarrow y(1), \dots, y(n)$$

$$z = x + y: z_1, \dots, z_n \Rightarrow z(1), \dots, z(n)$$

atunci în general $z(k) \neq x(k) + y(k)$.

- ~~contor~~ exemplu:

$$x: 0, 1, 2, \dots, 8$$

$$y: 8, 7, 6, \dots, 0$$

$$z: 8, 8, 8, \dots, 8$$

$$z_{\text{ordonat}} = 0, 2, 4, 6, \dots, 16$$

$$y_{\text{ordonat}} = 0, \dots, 7, 8.$$

$$\Rightarrow z: 8, 8, 8, \dots, 8$$

$$\text{fie } \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) = (v(1), \dots, v(n))$$

$\mathcal{L}$ = funcția de ordonare a n -tuplului.

- pt. filtrare avem nevoie de 1 singură valoare

$\Rightarrow$

Filtru median

median $\neq$ medie.

$$\text{pt. } n = 2k + 1$$



mediana este $v(k+1)$ element.

are k - val. mai mici în stînga

k - val. mai mari în dreapta.

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_k \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_{(k+1)} \quad \underbrace{\quad \quad \quad}_k \text{ elem.}$$

$2k+1$ elem.

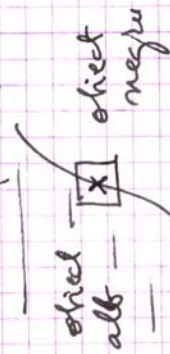
- în general $n = 2k+1$. (poate fi și $2k$).

Filtrul de minim și filtrul de maxim

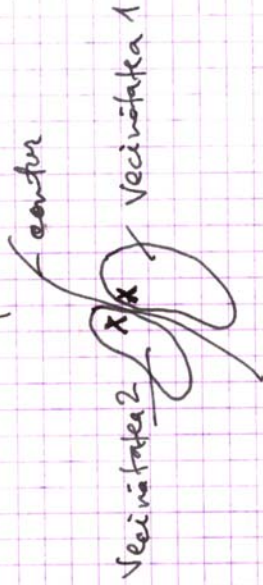
- f. de min = ia val. cea mai mică

- f. de max = ia val. cea mai mare.

- vecinătățile pot fi alese adaptiv.



de ex. pe contur, extindem vecinătatea astfel:
(sau f. aproape)



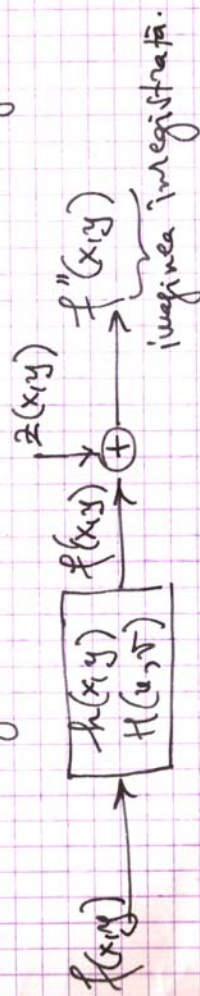
→ Îngustărea vecinătăților

avem $f(x, y)$ - și nu se știe cum a fost degradată.

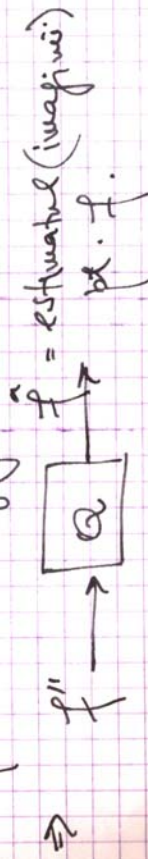
→ Restaurarea imaginilor

- degradare, lateraliștii
- cu zgomot aleator.

- în general se cunoaște modelul de degradare.



- în general 3 efecte de degradare: o anverșă
invariantă spațială a aparatelor de capăt imagine
pe care le neglijăm.



- pt. un filtru de mediere cu vecinătate 3: →

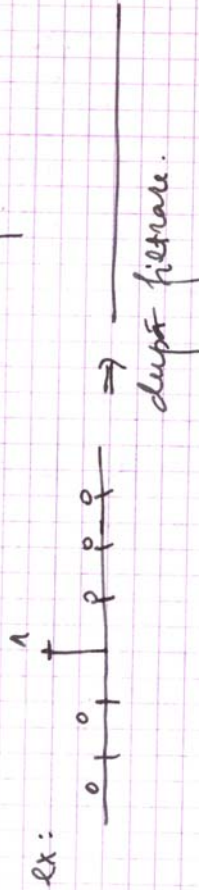


- un filtru de mediană va realiza la ieș.: →



⇒ păstrează "saltul" de la un pixel la altul.

adică păstrează mai bine preferențele înalte (trec frecv. spark înalte, care n-au componente continue)

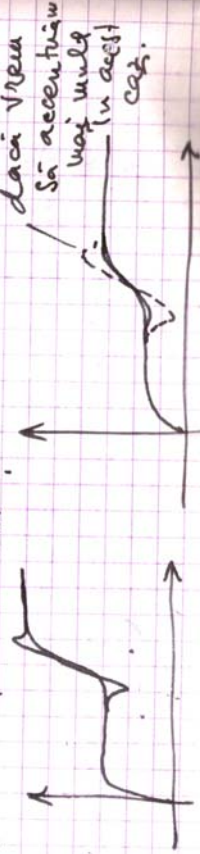


Filtre adaptive

- un filtru "normal": $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot f_i$

- un f. adaptiv liniear: $\sum_{i=1}^n \alpha_i(f) \cdot f_i$

ex: accentuare "MAH"?



dacă vrem să accentuăm mai mult în acest caz.

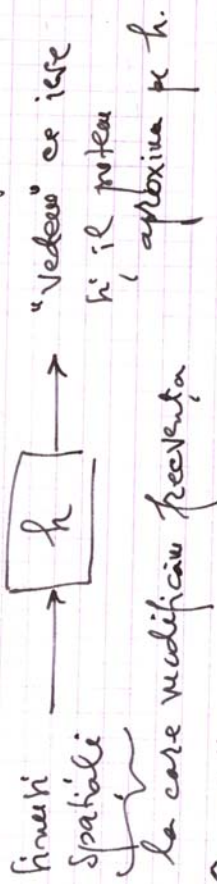
$\hat{f}$ - trebuie să fie optim într-un anumit sens.
 $\hat{f} - f$. să fie cât mai apropiat de f .

$$f'' = f' + z = f * h + z$$

dacă cunoaştem $z \Rightarrow f' = f'' - z$
 dar nu cunoaştem z !!

- am putea pp. că îl cunoaştem pe h - dar de obicei nu putem face o astfel de presupunere.

- dar ne achiziţionăm doar un f , ci mai multe imagini - pt. care să nu se modifice.



$$\|f - \hat{f} * h\| - \text{să fie mică.}$$

$$\| \cdot \|^2 - \text{min.}$$

$$\|f'' - \hat{f} * h\|^2 = 0 \text{ de ex.}$$

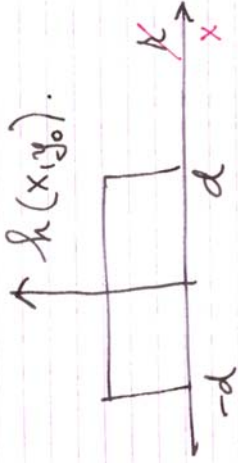
$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2$$

$$\|F''(u,v) - \hat{F} * H(u,v)\|_{L^2} = 0 \Rightarrow \text{filter invers.}$$

$$\hat{f}'' = \hat{f} \cdot H$$

$$f(u,v) = \frac{\hat{f}''(u,v)}{H(u,v)}$$

- pp. că avem un sistem cu ieşire finită
 (cazul curent):

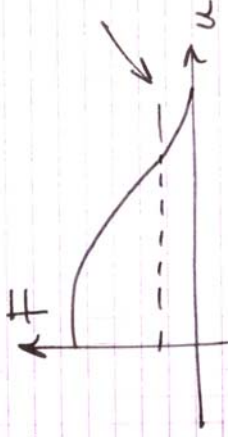


$$\text{transformata de Fourier} = \frac{\sin x}{x}.$$



În punctele în care $H(u, v_0) = 0$ vom avea "probleme" cu calcularea lui $\hat{f}$.

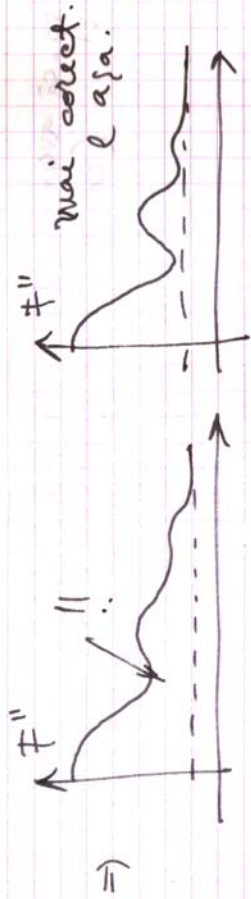
- pp:



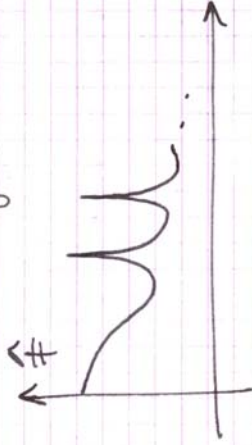
Spectrul de putere
 (= relativ constant).

$$\hat{f} \cdot H = \hat{f}'' \Rightarrow$$





din cauza zgomotului $f'' \neq 0$.



$\Rightarrow$ trebuie aduse niște îmbunătățiri.

dacă $|Q| = \frac{1}{|H|} > \max$. - crește peste o valoare maximă atunci o înlocuim (pt. că știu că se dat. / 0).

Șau cînd crește mult o facem zero

Metode de optimizare

$$f'' = f * h + z \quad (z = \text{zgomot}) \quad * = **$$

$$z = f'' - f * h$$

dacă estimăm f cu $\hat{f}$

$\Rightarrow z \approx f'' - \hat{f} * h$ - dacă nu în toate punctele, înlocuim să respectăm anumite condiții globale.

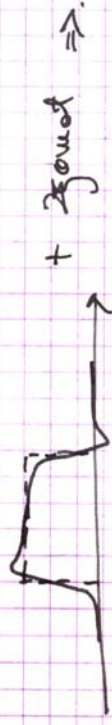
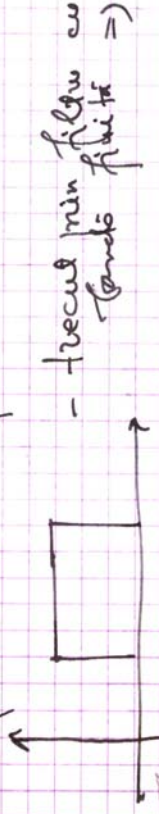
$$E_{\text{zg}} = \|z\|^2 = \|f'' - \hat{f} * h\|^2$$

$$E_{\text{zg}} = \text{energia de zgomot} = E_z$$

$\Rightarrow$ constrângere pt. f :

$$\|f'' - \hat{f} * h\|^2 - E_z = 0$$

ex: filtrare inversă pe un semnal unidimensional.



inversul fn. de integrare = derivare $\Rightarrow$
se va reduce panta, min filtrare inversă,
ce presupune variații mari $\rightarrow$



$$\|\hat{f} * h\| - \text{să fie minimă.}$$

(pb. de minim cu constrângeri).

- dăruie toate f alegem un $\hat{f}$ care de ex. să ne dea o bună derivată minimă.

→ se poate scrie:

$$\|F'' - \hat{F} \cdot H\|^2 - E_2 = 0.$$

$$\lim_i \|F \cdot C\|^2 \rightarrow 0$$

$$\|F \cdot C\|^2 + \lambda (\|F'' - \hat{F} \cdot H\|^2 - E_2) \rightarrow \text{minimum}$$

Lagrange (limitator?).

Dacă trecem din dom. continuu - în discret →

$$\lim_i f(i,j) \quad \underline{f(k,e) = A(k,e) + j \cdot B(k,e)}.$$

norma derivatelor →

$$\sum_{k,e} |\hat{F}(k,e) \cdot C(k,e)|^2 + \lambda \left(\sum_{k,e} |F''(k,e) - \right.$$

$$\left. - (A + jB)H \right|^2 - \text{se fie minim.}$$

$$\left. - E_2 \right) \quad \left\{ E_2 = E_L \right.$$

$$\sum_{k,e} \left[(A + jB)C(A - jB) \cdot C^* + \lambda (F'' - (A + jB) \cdot H) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (F''^* - (A - jB) \cdot H^*) \right] - \lambda E_L \rightarrow \text{minimum}$$

$C^* = \text{complex conjugate}$

$$|(A + jB)|^2 = (A + jB)(A + jB)^* = (A + jB)(A - jB)$$

- neamăscute: $A, B(k,e)$.
- derivăm în funcție de A, B .
- pt. fiecare k, e avem o ecuație independentă.

$$\sum \left[(A^2 + B^2) \cdot |C|^2 + \lambda (|F''|^2 - F''^* (A - jB) \cdot H^* - \right.$$

$$\left. - (A + jB) \cdot H \cdot F''^* + (A^2 + B^2) \cdot |H|^2 \right] - \text{min.}$$

$$\text{avem } (A - jB) \cdot F'' \cdot H^* +$$

$$H + (A + jB) \cdot (F'' \cdot H^*)^*$$

$$\Leftrightarrow (A - jB) \cdot (C + jD) +$$

$$+ (A + jB) \cdot (C - jD)$$

= ... trebuie să rămânem pentru imaginea? :

$$(AC + A^*D - jBC + \dots = 2(AC + BD).$$

$$C = \text{Re} \{ F'' \cdot H^* \}$$

$$D = \text{Im} \{ F'' \cdot H^* \}.$$

$$\Rightarrow -(A - jB) \cdot F'' \cdot H^* - (A + jB) H F''^* =$$

$$= -2A \cdot \text{Re} \{ F'' \cdot H^* \} - 2B \cdot \text{Im} \{ F'' \cdot H^* \}.$$

$$\frac{\partial}{\partial A} \Big|_{k,e} \cdot \text{Expresie} = 0. \Rightarrow$$

$$\hat{F} = F'' \cdot Q \Rightarrow$$

$$\left| F''(k, \epsilon) - \frac{\lambda \cdot |H(k, \epsilon)|^2 \cdot F''(k, \epsilon)}{\lambda |H(k, \epsilon)|^2 + |C(k, \epsilon)|^2} \right|^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{k, \epsilon} |F''(k, \epsilon)|^2 \cdot \frac{(1-\lambda) |H(k, \epsilon)|^2 + |C(k, \epsilon)|^2}{(\lambda |H(k, \epsilon)|^2 + |C(k, \epsilon)|^2)^2} = E_N$$

- pt. $H(k, \epsilon) \approx 0$. sau foarte mic.

$$Q(k, \epsilon) \approx |H^*| \approx 0.$$

$\Rightarrow$ unde H este f. mic $\Rightarrow$ k și Q va fi f. mic.

$$E_N = \sum_{k, \epsilon} |F''(k, \epsilon)|^2 \cdot \frac{|C(k, \epsilon)|^4}{(\lambda |H(k, \epsilon)|^2 + |C(k, \epsilon)|^2)^2}.$$

- pt. a afla λ - se rezolvă ec. prin
aproximări succesive



ne interesează doar pt. $\lambda \geq 0$.

facem funcția $E_N(\lambda)$ și pt. un ϵ dat
îl calculăm în λ .

$$\frac{\partial}{\partial A} A(k, \epsilon) = 2A |C|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\{F'' H^*\} + 2A |H|^2 = 0$$

$$A(|C|^2 + \lambda |H|^2) = \lambda \operatorname{Re}\{F'' H^*\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial B} B(k, \epsilon) = 2B |C|^2 - 2\lambda \operatorname{Im}\{F'' H^*\} + 2B |H|^2 = 0.$$

$$\Rightarrow B(|C|^2 + \lambda |H|^2) = \lambda \operatorname{Im}\{F'' H^*\}$$

pt. $\forall k, \epsilon$.

$$\Rightarrow \hat{F}(k, \epsilon) = A + jB = \lambda \cdot \frac{\operatorname{Re}\{F'' H^*\} + j \operatorname{Im}\{F'' H^*\}}{|C|^2 + \lambda |H|^2}$$

$$\Rightarrow \hat{F}(k, \epsilon) = \frac{\lambda \cdot F'' H^*}{|C|^2 + \lambda |H|^2} \cdot \frac{H}{H} \Rightarrow$$

$$\hat{F}(k, \epsilon) = \frac{1}{H(k, \epsilon)} \cdot \frac{\lambda \cdot F'' \cdot |H|^2}{\lambda |H|^2 + |C|^2}$$

$\Rightarrow$ avem de-a face cu un filtru linear -
pt. $\forall k, \epsilon$.

$$\hat{F}(k, \epsilon) = Q(k, \epsilon) \cdot F''(k, \epsilon)$$

$$Q(k, \epsilon) = \frac{1}{H(k, \epsilon)} \cdot \frac{\lambda \cdot |H(k, \epsilon)|^2}{\lambda |H(k, \epsilon)|^2 + |C(k, \epsilon)|^2}.$$

$$\|F'' - \hat{F} \cdot H\| = E_2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k, \epsilon} |F''(k, \epsilon) - \hat{F}(k, \epsilon) \cdot H(k, \epsilon)|^2 = E_2 = E_N.$$

- dacă zgomotul e f. mic $\Rightarrow \lambda \rightarrow \infty$.

$H =$ cunoscut

$C =$ filtru de derivare

$$\Rightarrow \lambda |H(k, \ell)|^2 \gg |C(k, \ell)|^2$$

$$\Rightarrow Q(k, \ell) \approx 1.$$

- în acel caz $\Rightarrow Q = \frac{1}{H} =$ filtru invers.

- unde zgomotul e foarte mare $\Rightarrow H(k, \ell) \approx 0$.

$$\Rightarrow Q = \dots$$

$Q =$ filtru cu constrângeri.

TRANSFORMĂRI UNITARE

- se referă la o clasă de matrice utilizate pt. reprezentarea semnalelor (imaginiilor)

- o matrice este unitară (de tip $N \times N$) dacă inversa ei este matricea: A^{*T} :

$$A \cdot A^{*T} = A^{*T} \cdot A = I_N. \quad A \in \mathbb{C}^{N \times N}.$$

Capul 1-D.

- fie $\underline{u} =$ vector:

$$\underline{u} = [u(0) \quad u(1) \quad \dots \quad u(N-1)]^T$$

echivalente de timp ale unui semnal.

$\underline{v} = A \cdot \underline{u}$ - transformarea unitară directă.

$$\underline{v} = [v(0) \quad v(1) \quad \dots \quad v(N-1)]^T$$

$\underline{v}$ = transformata lui $\underline{u}$.

mat. A specifică transformarea.

$$v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a(k, n) \cdot u(n) \quad + k = \overline{0, N-1}.$$

$$A = \{a(k, n)\}_{k, n = \overline{0, N-1}}.$$

Transformarea inversă:

$$\underline{u} = A^{-1} \cdot \underline{v} \Rightarrow \underline{u} = A^{*T} \cdot \underline{v}.$$

$$u(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a^*(k, n) \cdot v(n) \quad + n = \overline{0, N-1}.$$

$$v(n) \text{ !!}$$

- Rel. inversa:

$$u(u, u) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{kl}^*(u, u) \cdot v(k, l)$$

+ $u, u = 0, N-1$

- transp. este definita de N^2 matrice de dimensi $N \times N$.
(axe).

- mat. trebuie să respecte condiția de unitaritate.
(ortogonalitate).

$$\sum_{u, u=0}^{N-1} a_{kl}(u, u) \cdot a_{k'l'}^*(u, u) = \delta(k-k', l-l')$$

$$= \begin{cases} 1 & k=k', l=l' \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

- pt. calculul unei elem. fiind nevoie de N^2 înmulțiri.
pt. k, l fixati.

→ complexitatea înmulțirii calcul = $O(N^4)$.
- poate fi redusă la $O(N^3)$ în ipoteza de separabilitate.

O transp. bidim. unitară este separabilă dacă elementele $a_{kl}(u, u)$ pot fi scrise:

$$a_{kl}(u, u) = a_k(u) \cdot b_l(u) = a(k, u) \cdot b(l, u)$$

pt. + $k, l = 0, N-1$

(adică dacă cele N^4 elem. care definesc transformarea se pot scrie pornind de la elementele a numărui 2 matrice $N \times N$,

respectiv: $A = \{a(k, u)\}$ $k, u = 0, N-1$
 $B = \{b(l, u)\}$ $l, u = 0, N-1$.

și: $A^{-1} = A^{*T}$
 și $B^{-1} = B^{*T}$

- în practică se alege $A = B$ (de fapt $B = A$):

$$a_{kl}(u, u) = a(k, u) \cdot a(l, u)$$

- în ipoteza separabilității + $A = B \Rightarrow$
 expresiile transformate Levin:

Capul 2-D separabil:

$$v(k, l) = \sum_{u=0}^{N-1} a(k, u) \cdot u(u, u) \cdot a(l, u) \quad + k, l = 0, N-1$$

$$u(u, u) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a^*(k, u) \cdot v(k, l) \cdot a(l, u)$$

$k, l = 0$ + $k, l = 0, N-1$

$$\begin{cases} V = A \cdot U \cdot A^* \\ U = A^{*T} \cdot V \cdot A^* \end{cases} \quad V = A \cdot U \cdot A^T$$

Observații:

• în cazul în care $U \in \mathbb{R}^{M \times N}$ atunci

tr. unitară presupune / necesită 2 matrice:

$$\begin{array}{ccc} A_M \in \mathbb{C}^{M \times M} & A_M^{-1} = A_M^{*T} & \\ A_N \in \mathbb{C}^{N \times N} & A_N^{-1} = A_N^{*T} & \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V = A_M U \cdot A_N^T \\ U = A_M^{*T} V \cdot A_N^* \end{cases}$$

- de ce tr. "separabile"?

$$V = A \cdot U \cdot A^T \Leftrightarrow V = [A \cdot (AU)^T]^T$$

$$AU = A \cdot \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \end{bmatrix}$$

mod. U evidentînd coloanele.

$$AU = \begin{bmatrix} | & | & | & | & | \end{bmatrix}$$

- fiecare coloană din $AU = \text{transp. 1-D}$
a primei coloane din U .

→ este o tr. separabilă - it. c.ă se aplică întâi
o tr. 1-D pt. coloane apoi una 1-D
pt. linii.

Baza de matrice.

pt. 2 secunde 2-D: $F, G \in \mathbb{C}^{N \times N}$

definiție: modulul scalar:

$$\langle F, G \rangle = \sum_{m,n=0}^{N-1} f(u_m) \cdot g^*(u_m)$$

$$A^* = \begin{bmatrix} a_0^* & a_1^* & \dots & a_{N-1}^* \end{bmatrix}$$

coloanele mat. A^{*T} .

- definiție: $A_{ke}^* \stackrel{\text{def}}{=} \underline{a_k}^* \cdot \underline{a_e}^{*T}$
 $(N \times 1 \cdot 1 \times N) = (N \times N)$
 $\forall k, e = 0, N-1.$

Relație tr. 2-D separabilă Levin.

$$\Rightarrow v(k, e) = \langle U, A_{ke}^* \rangle \quad \forall k, e = 0, N-1.$$

tr. inv.: $U = \sum_{k, e=0}^{N-1} v(k, e) \cdot A_{ke}^*$

Exemplu:

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mat. unei rotații cu 45°.

Definiție cu 3c.

$$A^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{*T} = A \cdot A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= I_2.$$

$$V = A \cdot U \cdot A^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 14 & -10 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\Rightarrow V = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \underline{a}_0^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{a}_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{00}^* = \underline{a}_0^* \cdot \underline{a}_0^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{01}^* = \underline{a}_0^* \cdot \underline{a}_1^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{10}^* = \underline{a}_1^* \cdot \underline{a}_0^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^* = \underline{a}_1^* \cdot \underline{a}_1^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

formăm o altă țară a matricilor ($\text{Lin } \mathbb{R}^{2 \times 2}$)

$\Rightarrow$ 4 mat 2x2 pot fi scrise ca o combinație liniară.

Verificăm că proiecția lui $\underline{U}$ pe subsp. $\underline{A}^*$ = coef. lui $\underline{V}$:
 $\langle \underline{U}, \underline{A}_{00}^* \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle =$

$$= \frac{3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 1}{2} = 7 = V(0,0)$$

$$\langle \underline{U}, \underline{A}_{01}^* \rangle = -5 = V(0,1)$$

verif. că
 calculăm:
 $\sum_{k=0}^{N-1} V(k,2) \cdot \underline{A}_{ke}^* = 7 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} +$

$$+ (-5) \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{V}$$

- utilizare $\angle$ analiza - ca te. Fourier
 - compresia.

Proprietăți ale transf. unitare

1. Conservarea energiei.

$$\text{1-D: } E_v = \|\underline{v}\|^2 = \underline{v}^{*T} \cdot \underline{v} = (\underline{A} \cdot \underline{u})^{*T} \cdot \underline{A} \cdot \underline{u} = \underline{u}^{*T} \cdot \underbrace{\underline{A}^{*T} \cdot \underline{A}}_{\text{In}} \cdot \underline{u} = \underline{u}^{*T} \cdot \underline{u} = \|\underline{u}\|^2 = E_u$$

2. Compactarea energiei

- în general transformarea este aleasă a.i. energia să fie distribuită inegal în spațiul transformatei, chiar dacă ea era uniform distribuită în spațiul original.
- în plus, transformatele sînt alese a.i. coef. în spațiul transformatei să fie mai decorelați decât în spațiul original.
- transformata optimă care compactează maximum de energie într-un n. de coef. date și care în același timp decorelează complet coeficienții în spațiul transformatei s.n. fr. Karhunen-Loève

Transformata Fourier Discretă (TFD).

Cazul 1-D:

$$\underline{u} = [u(0) \dots u(N-1)]^T$$

$$\underline{v} = [v(0) \dots v(N-1)]^T$$

$$\text{unde } v(k) = \sum_{n=0}^{N-1} u(n) \cdot \exp\left(-\frac{2\pi j k n}{N}\right)$$

$$\forall k = 0 \dots N-1$$

TFD:

$$u(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) \cdot \exp\left(\frac{2\pi j k n}{N}\right) \quad \forall n = 0 \dots N-1$$

- astfel definită TFD nu este unitară
(nu conservă energia).

$\Rightarrow$ TFD unitară:

$$\begin{cases} v(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \dots \\ u(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum \dots \end{cases}$$

$$\underline{F} = \{f(k, n)\}_{k, n=0 \dots N-1}$$

$$f(k, n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-\frac{2\pi j k n}{N}\right)$$

$\Rightarrow$ TFD se poate scrie matricial:

$$\begin{cases} \underline{v} = \underline{F} \cdot \underline{u} \\ \underline{u} = \underline{F}^* \underline{v} \end{cases}$$

ținând cont de $\underline{F} = \underline{F}^T$.

Obs.: 3 algoritmi rapizi FFT

- pt. cazul 1D: $O(N^2)$ se reduce la $O(N \log N)$.

- pt. cazul 2D:

$$\underline{U} = \{u(w, n)\}_{w, n=0 \dots N-1}$$

$\Rightarrow$ prin TFD

$$\underline{V} = \{v(k, l)\}_{k, l=0 \dots N-1}$$

$$v(k, l) = \frac{1}{N} \sum_{w=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(w, n) \cdot \exp\left(-\frac{2\pi j (k w + l n)}{N}\right)$$

capul separat.

$$\forall k, l = 0 \dots N-1.$$

$$\underline{V} = \underline{F} \cdot \underline{U} \cdot \underline{F}$$

$$u(w, n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} v(k, l) \cdot \exp\left[\frac{2\pi j (k w + l n)}{N}\right]$$

$$\forall w, n = 0 \dots N-1.$$

$$\underline{U} = \underline{F}^* \cdot \underline{V} \cdot \underline{F}^*$$

- FFT: reduce $O(N^3) \rightarrow O(N^2 \log N)$.

de citit: pag. 141 ÷ 150.
+ TCD (DET).

COMPRESIA IMAGINILOR

Term. de compresie se refera la totalitatea metodelor ce au drept scop reducerea cantitatii de date necesare pt. stocarea si/sau transmiterea imaginilor.



Clasificare:

1. metode de compresie la nivel de pixel.
= met. care nu tin cont de corelatia intre $f = \hat{f}$ pixelii vecini si/lau si coloane.

- fiind tehnici de compresie fara pierdere de inf., adica imaginea originala poate fi refacuta perfect din cea comprimata (codata).

ex: - codarea Huffman, LZW (Lempel-Ziv-Welsh), RLE (Run Length Encoding), VBS (White Block Skipping).

2. Metode de codare predictie.

- sunt met. care realizeaza compresia pe baza exploatarii corelatiei intre pixelii vecini pe linie si coloane.

ex: DPCM (Differential Pulse Code Modulation)

3. Metode de compresie cu transformate.

- bazate pe scrierea imaginii intr-o alta baza min aplicarea unei transf. unitare (integrale) a.i. energia in spatiul transformat sa fie concentrata intr-un nr. cit mai mic de coef. Prin eliminarea coef. de energie joasa (care se doreste a fi in

nr. cit mai mare) si stocarea numai a acelor de energie mare, se obtin factori de compresie importanti cu pierderi neglijabile.

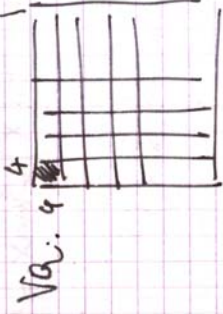


JPEG - factor de compresie



4. Alte metode:

- VQ (Vector Quantization) - cuantizare vectoriala
- codare cu fractali.



- pt. foarte multe imagini se face clustering pe blocuri 4x4.

(de ex. in 256 de clase de blocuri 4x4 - si

st. fiecare clasa se alege un vector reprezentativ - de ex. media vectorilor dintr-o clasa respectiva).

Metode de codare la nivel de pixel

1. Codarea Huffman

$$[S] = \{S_1, \dots, S_N\}$$

$$P(S_i) = p_1 \dots P(S_N) = p_N$$

P_i - cunoscut.

$$H(S) = - \sum_{i=1}^N P_i \cdot \log P_i \rightarrow \text{inf. medie pe histol.} \\ (\text{bitti/simbol})$$

$$H(S) = \max \Leftrightarrow P_1 = P_2 = \dots = P_N = \frac{1}{N}$$

$[X] = \{0, 1\}$ - darem să codăm simbolurile
sursei S cu simbolii din buza X .
a.i. entropia sursei secundare să fie
maximizată.

Eficiența codului este dată de lungimea medie:

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^N l_i \cdot P_i$$

l_i = lung. codului
absol. hist. S_i

$$\bar{L} = \frac{H(S)}{H(X)} \quad \bar{L} = \bar{L}_{\text{un}} \Leftrightarrow H(X) = \max. = 1$$

$\bar{L}_{\text{un}}$ = limita un. teoretică.
(cod absolut optimal)

$$\bar{L}_{\text{realizatie}} \geq \bar{L}_{\text{un}}$$

ex:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
	0,15	0,0625	0,14	0,0625	0,21	0,0625	0,0625	0,125
S_8	0,25	—	—	0,25	—	—	—	0,25
S_5	0,21	—	—	0,21	—	—	—	0,25
S_1	0,15	—	—	0,15	—	—	—	0,21
S_3	0,14	—	—	0,14	—	—	—	0,14

*

S_2	0,0625	—	—	0,15	—	—	0,125	0,25
S_4	0,0625	—	—	0,0625	—	—	0,125	—
S_6	0,0625	—	—	—	—	—	—	—
S_7	0,0625	—	—	—	—	—	—	—

*

	0,46	—	—	0,54	—	—	—	1
	0,29	—	—	—	—	—	—	—
	0,25	—	—	—	—	—	—	—

- S_8 : 10
- S_5 : 11
- S_1 : 000
- S_3 : 001
- S_2 : 0110
- S_4 : 0111
- S_6 : 0100
- S_7 : 0101

$$\bar{L} = \sum_i l_i \cdot P_i = 2 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,21 + 3 \cdot (0,15 + 0,14) + 4 \cdot 4 \cdot 0,0625 = 0,92 + 0,87 + 1 = 2,79 \text{ bitti/simbol}$$

Dacă n-am fi avut cant de
probabilități am fi codat cele 8 simbol.
pe 3 bitti $\rightarrow L = 3$.

-dezav: - probabilitățile nu sînt cunoscute $\Rightarrow$
trebuie calculată histograma (imagină).
trebuie stocată în tabelă de codare.

Obs: dacă histograma este uniformă $\Rightarrow$ compresie
la 1.

LZW - Lempel - Ziv - Welch

2. Metoda Ziv - Lempel

- Tabel. o tabelă de codare care este construită pe măsură ce firul este parcurs, astfel ca codarea să se facă la decodare. $\Rightarrow$ nu este necesară stocarea sau transmiterea tabelului de codare.

ex: 10111000110111100110...

cod.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

10140632458 ...

Obs. Se folosește un nr. fix pt. lungimea codului.

Obs. Une spirit - un nr. mare de biți se va regăsi printre cuvintele din tabelă și astfel vor fi codate cu doar 8 biți de ex. (dacă fixăm codul pe 8 biți).

- luăm un bit: 1 - 3 în tabelă?

dacă 3 - mai luăm un bit

dacă nu 3 - îl trecem în tabelă.

- în fișul codat - Scriem doar prefixul cuvântului care nu se află în tabelă.

- începem apoi cu un bit mai încolo de prefix.

Decodarea:

10140632458...

cod.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

(1) 1X, unde 0 $\Rightarrow$ X=0.

(2) 10X, unde 1 $\Rightarrow$ X=1.

(3) 101X - unde 4

1X $\Rightarrow$ X=1.

(4) 1011X $\Rightarrow$ 10110y. 0y2.

$\Rightarrow$ y=0

(6) $\Rightarrow$ 101110002. 01X $\Rightarrow$ t=0

(3) 1011100001X

de tip 10y

(2) 101110000110y 01X

...

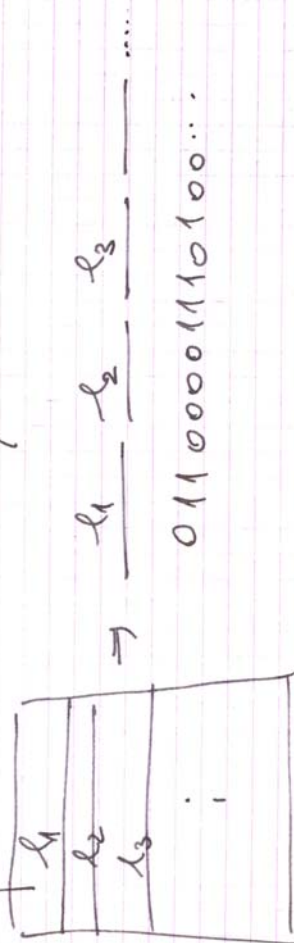
...

10111000011110011u

3. Codarea RLE.

a) Imagini binare.

- imaginea se transformă într-un fir unidimensional prin concatenarea linilor / coloanelor acesteia.



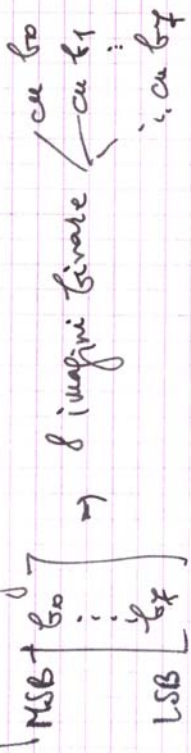
- ~~apare~~ în firul c
+ primul elem. al firului codat este primul el. al firului decodat. (copiem. 0) -
după care se scrie în firul codat lungimea fiecărui subfir constant al firului.

01243112 ...

- pt. imagini prin fax.

6) Imagini în formă de gr.

⇒ codare RLE pe plane de gr.



- imaginea corespunde nivelului MSB va fi comprimată cel mai bine cu RLE.

- imaginea LSB = imagine de "zori" - care aproape că nu merită să fie codată.

- factorul de compresie !!

Parametri de evaluare a calității compresiei
BPP: $N \times M \times 8$

1. Raportul de compresie: o imagine $200 \times 500 = 60 \text{ Kb}$

$C = \frac{\text{nr. de bti necesare pt. stocarea imaginii originale}}{\text{nr. de bti necesare pt. stocarea imaginii compresate}}$

2. Numărul de bti/pixel:

$N = \frac{\text{nr. de bti nec. pt. stoc. imag. compresate}}{\text{nr. total de pixeli.}}$

$N = N_{bp} = \lceil \log_2 \rceil$.

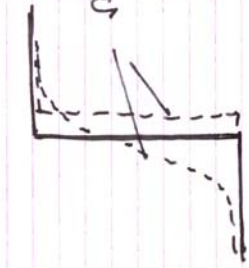
3. Pt. metode de compresie cu pierdere: evaluarea calității imag. compresate se face prin PSZ (raportul deurnal-egouat):

$$PSZ = 10 \log_{10} \frac{\sum_i \sum_j I_{orig}^2(i,j)}{\sum_i \sum_j (I_{orig}(i,j) - I_{codat}(i,j))^2} \quad [dB]$$

$PSZ = \frac{\text{energia imaginii originale}}{\text{energia de egouat (care apare prin codare)}}$

* pt. met. cu pierdere: C și PSZ contează. (Să fie uari amândouă!).

Obs: PSZ = o măs. obiectivă și nu exprimă subiectivul ochiului uman.



- seamnal original

seamnal codate ale seamnalului original.

- ochiul uman percepe mai bine seamnalul [...] decit are PS2 unde mast decit

Metode de codare predictive

Cazul 1D:

pop. un seamnal $u(n)$

pe baza a N^M es. ale seamnalului sa se faca estimarea urmatoarelor seamnalului.

$u(n), u(n-1), u(n-2), \dots, u(n-M+1), \dots, u(n)$

$$\hat{u}(n+1) = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \cdot u(n-i), \text{ unde } a_i \text{ s\u00ednt n\u00e9ste coef. care s\u00ednt optimiza\u021bi a. i. estimarea seamnalului urm\u00e2tor pe baza a } u(n-i)$$

seamnalului urm\u00e2tor pe baza a $u(n-i)$ mai t\u00e2rziu folosind un criteriu de eroare.

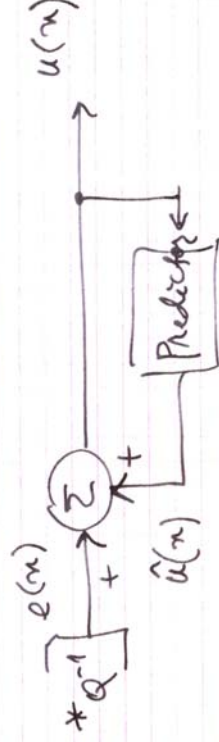
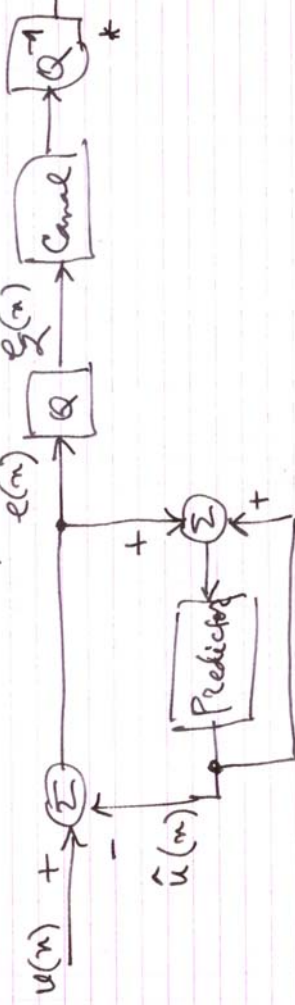
Obs: tehnica se bazeaz\u00e2 pe faptul c\u00e2 e\u0219ent - k\u00e2t corelate,

$e(n) = \text{eroarea}$

$$e(n) = u(n+1) - \hat{u}(n+1)$$

Obs: pe obicei criteriul: eroarea p\u00e2tratic\u00e2 medie minim\u00e2 (pe baza func\u021biei de autocorela\u021bie a seamnalului)

Schema de codare cu predic\u021bie:



Q = bloc de codare (Q^{-1} = decodare).

Obs: merge o codare Huffman determinarea coef.:

$$\hat{u}(n+1) = \sum_{i=0}^{M-1} a_i \cdot u(n-i)$$

$$e(n) = u(n+1) - \hat{u}(n+1) = u(n+1) - \sum_{i=0}^{M-1} a_i \cdot u(n-i)$$

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} e^2(n) \rightarrow \text{minim\u00e2} \rightarrow a_0, a_1, \dots, a_{M-1} = ?$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0 \text{ pt. } \forall i = 0, 1, \dots, M-1 \rightarrow a_i$$

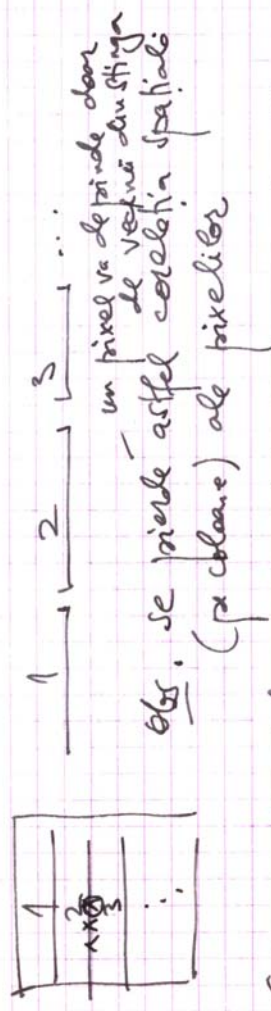
Presupunem $u = \text{sigment alb}$. $\Rightarrow R_u(i) = 0 \forall i \neq 0$.

$$R_u(k) = \begin{cases} \sigma_u^2 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

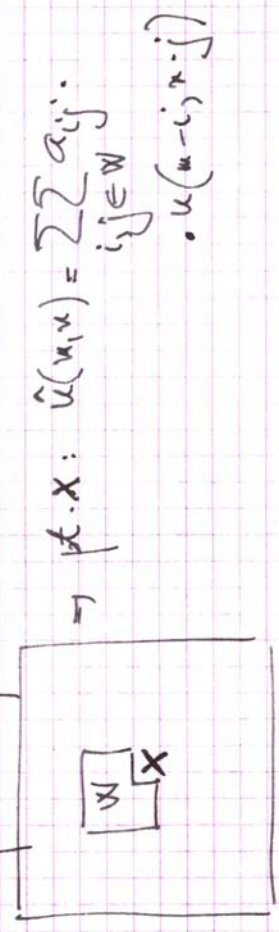
-) coef. $a_k = 0 \Rightarrow$ eroarea de predicție = constantă
 $\rightarrow$ nu se poate face nici o predicție
 * Sigment alb.

(predicția în cazul acesta = 0, adică cea
 mai bună predicție = media semnalului).

Figura 2D



Solu.: putem defini o vecinătate bidimensională: W .



Comprelin cu transformate
Transformarea Karhunen-Loève

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = \frac{\partial \sum_{k=0}^{M-1} a_k \cdot u(n-k)}{\partial a_i} = \frac{\partial [u(n-1) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k \cdot u(n-k)]^2}{\partial a_i}$$

$$= -2 \left(u(n-1) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k \cdot u(n-k) \right) \cdot u(n-1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial a_i} \left[u(n-1) - \sum_{k=0}^{M-1} a_k \cdot u(n-k) \right] = 0 \quad i=0, M-1$$

dar $u(n) \cdot u(n-k) = R_u(k)$ = funct. de autocorelație.

$$\Rightarrow R_u(i+1) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k \cdot R_u(i-k) \quad i=0, M-1$$

= sistem de M ecuații cu M necunoscute
 $\Rightarrow a_k = \dots \quad k=0, M-1$

Matriceal se poate scrie:

$$\begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(1) & \dots & R_u(M-1) \\ R_u(-1) & R_u(0) & \dots & R_u(M-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u(-(M-1)) & R_u(-(M-2)) & \dots & R_u(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_u(1) \\ R_u(2) \\ \vdots \\ R_u(M) \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_R \quad \underbrace{\hspace{10em}}_a \quad \underbrace{\hspace{10em}}_b$

$$a = R^{-1} \cdot b$$

- funct. de autocorelație este pară $\Rightarrow R_u(-1) = R_u(1)$.

Cazul 1-D

$$\underline{u} = [u(0) \dots u(N-1)]^T \quad \text{Stationar în sens larg}$$

doim: $A = [\underline{u}_0 \ \underline{u}_1 \ \dots \ \underline{u}_{N-1}]^T$
 în det. transf. unitară $(A^{-1} = A^T)$

a. r. : $\underline{v} = A \cdot \underline{u} \quad \underline{v} = [v(0) \dots v(N-1)]^T$

Să îndeplinească urm. prop.: dacă înlocuim ultimele valori ale vech. $\underline{v}$ cu niște constante atunci eroarea introdusă în semnalul original să fie minimă. Doim ca începând de la rangul "m" să înlocuim $c(u) = v(u) \dots c(N-1) = v(N-1)$ și obținem:

$$\hat{\underline{v}} = [v(0) \dots v(u-1) \ c(u) \ \dots \ c(N-1)]^T$$

prin transf. inversă:

$$\hat{\underline{u}} = A^T \cdot \hat{\underline{v}}$$

$\Rightarrow A = ?$ a. i. $\varepsilon = \|\underline{u} - \hat{\underline{u}}\|^2 \rightarrow \text{minim.}$
 (ex. pătratică medie).

$$\underline{u} = A^T \cdot \underline{v} = [\underline{u}_0 \ \underline{u}_1 \ \dots \ \underline{u}_{N-1}] \cdot \begin{bmatrix} v(0) \\ \vdots \\ v(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \sum_{i=0}^{N-1} v(i) \cdot \underline{u}_i$$

$$\hat{\underline{u}} = \sum_{i=0}^{u-1} v(i) \underline{u}_i + \sum_{i=u}^{N-1} c(i) \cdot \underline{u}_i$$

33.

$$\underline{u} - \hat{\underline{u}} = \sum_{i=u}^{N-1} (v(i) - c(i)) \cdot \underline{u}_i$$

$$\varepsilon = \frac{\|\underline{u} - \hat{\underline{u}}\|^2}{\sum_{i=u}^{N-1} (v(i) - c(i)) \cdot \underline{u}_i^T \cdot \left(\sum_{j=u}^{N-1} (v(j) - c(j)) \cdot \underline{u}_j \right) \cdot \underline{u}_i} =$$

$$\varepsilon = \sum_{i=u}^{N-1} \sum_{j=u}^{N-1} (v(i) - c(i)) (v(j) - c(j)) \cdot \underline{u}_i^T \cdot \underline{u}_j$$

$A = \text{transf. unitară.}$

$$\underline{u}_i^T \cdot \underline{u}_j = \delta_{ij} \quad (\text{veem ca transf. să fie unitară})$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \sum_{i=u}^{N-1} (v(i) - c(i))^2$$

- Doim să aflăm constantele perspective?

- pt. a det. $\frac{\partial \varepsilon}{\partial c(k)} = 0 \quad \forall k = u \dots N-1$
 $\Rightarrow c(k)$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial c(k)} = -2(v(k) - c(k)) = 0 \Rightarrow c(k) = v(k)$$

$$\forall k = u \dots N-1.$$

$\Rightarrow$ val. constantelor = val. medii statistice a eșantionelor înlocuite

$$\varepsilon = \sum_{k=u}^{N-1} \overline{(v(k) - \bar{v}(k))^2}$$

$$v(k) = \langle \underline{y}_k, \underline{u} \rangle = \underline{y}_k^T \cdot \underline{u} = \underline{u}^T \cdot \underline{y}_k$$

proiecția lui $\underline{u}(k)$ pe $\underline{y}_k$

$$\Rightarrow \varepsilon = \sum_{k=u}^{N-1} \overline{(v(k) - \bar{v}(k)) (v(k) - \bar{v}(k))} =$$

$$= \sum_{k=u}^{N-1} \overline{(\underline{y}_k^T \cdot \underline{u} - \underline{y}_k^T \cdot \bar{\underline{u}}) (\underline{u}^T \cdot \underline{y}_k - \bar{\underline{u}}^T \cdot \underline{y}_k)}$$

$$\bar{v}(k) = \underline{y}_k^T \cdot \underline{u} = \underline{y}_k^T \cdot \bar{\underline{u}} \quad (\underline{y}_k = \text{vector determinist})$$

$$\varepsilon = \sum_{k=u}^{N-1} \underline{y}_k^T (\underline{u} - \bar{\underline{u}}) (\underline{u} - \bar{\underline{u}})^T \cdot \underline{y}_k =$$

$$= \sum_{k=u}^{N-1} \underline{y}_k^T \cdot \underbrace{(\underline{u} - \bar{\underline{u}})(\underline{u} - \bar{\underline{u}})^T}_{\text{mat. } N \times N} \cdot \underline{y}_k$$

s. not. $K_u =$ matricea de covarianțe a lui $\underline{u}$.

$$\varepsilon = \sum_{k=u}^{N-1} \underbrace{\underline{y}_k^T}_{1 \times N} \cdot \underbrace{K_u}_{N \times N} \cdot \underbrace{\underline{y}_k}_{N \times 1}$$

$$K_u = \overline{(\underline{u} - \bar{\underline{u}})(\underline{u} - \bar{\underline{u}})^T} \quad [\vdots] [\dots]$$

$$K_u(i,j) = \overline{(u(i) - \bar{u}(i))(u(j) - \bar{u}(j))}$$

reprez. covarianța dintre al-i-lea și al-j-lea elem. al vectorului $\underline{u}$.

(arată cât de corelate statistic sînt eș. i și j între ele).

$$K_u(i,i) = \overline{(u(i) - \bar{u}(i))^2} = \overline{u^2(i)} = \sigma_u^2$$

(def. între mat. de corelație și mat. de covarianțe este o constantă).

[Valori mari] - pt. un semnal real $\Leftarrow$ teoretic

din ce în ce mai mici cu cât sînt mai departe de freq. principale.

$$\varepsilon = \sum_{k=u}^{N-1} \underline{y}_k^T \cdot K_u \cdot \underline{y}_k$$

$$\underline{y}_k = ? \quad \text{a.i.} \quad \varepsilon \rightarrow \min.$$

condiție supl. $\underline{y}_k^T \cdot \underline{y}_k = 1$. (conținere).
pt. $\forall k = u, N-1$

Nota: minimizare cu constrângeri.

ex: $f(x)$ - X care min. $f(x)$ a.i. $g(x) = a$.

se minimizează: $\Psi(x) = f(x) + \lambda(g(x) - a)$.
 $\lambda =$ multiplicatorul Lagrange

- minimizăm:

$$\Psi = \sum_{k=u}^{N-1} \underline{y}_k^T \cdot K_u \cdot \underline{y}_k + \sum_{k=u}^{N-1} \lambda_k (\underline{y}_k^T \underline{y}_k - 1)$$

Ex: un vector $\underline{y} = \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$

hi $E(f) \in \mathbb{R}$

expresie scalară care dep. de val. vect. $\underline{y}$

$\underline{y} = ?$ a.i. E min.

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial y_0} = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial y_1} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial E}{\partial y_{N-1}} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial y_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial y_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \nabla_{\underline{y}} E = \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial y_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial E}{\partial y_{N-1}} \end{bmatrix} \quad \nabla_{\underline{y}} E = \text{gradientul expresiei } E \text{ în raport cu vect. } \underline{y}$$

dacă $A = 0$ matrice simetrică $B = B^T$

$$\boxed{\nabla_{\underline{y}} (\underline{y}^T \cdot B \cdot \underline{y}) = 2 \cdot B \cdot \underline{y}} \quad \text{de dem.!!}$$

$$\nabla_{\underline{y}} (\underline{y}^T \underline{y}) = 2 \underline{y} \quad (B = I_N)$$

$$\underline{\Psi} = \sum_{k=u}^{N-1} \underline{y}_k^T \cdot K_u \cdot \underline{y}_k + \sum_{k=u}^{N-1} \lambda_k (\underline{y}_k^T \underline{y}_k - 1)$$

$$\nabla_{\underline{y}_k} \underline{\Psi} = 0 \Rightarrow \underline{y}_k \quad \forall k = u, N-1$$

având în vedere $K_u = K_u^T \quad K_u(i,j) = K_u(j,i)$

$$\Rightarrow \nabla_{\underline{y}_k} \underline{\Psi} = 2 \cdot K_u \underline{y}_k + 2 \lambda_k \underline{y}_k = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{K_u \underline{y}_k = -\lambda_k \underline{y}_k}$$

- vectorii $\underline{y}_k$ care min. ex. păt. medie ca constrângere sînt fie ortogonali k de modul unitari. :
dacă notăm. $-\lambda_k = \lambda'_k$

$$\boxed{K_u \underline{y}_k = \lambda'_k \underline{y}_k} \quad \forall k = u, N-1$$

$\Rightarrow \underline{y}_k =$ vect. proprii ai mat. de covarianță a semnalului.

Obs. relația se păstrează pt. $\forall u$.

pt. $u=0 \Rightarrow$ expresia se poate generaliza la:
pt. $u=0. (\forall k = 0, N-1)$.

=> practic tr. K.L nu este unica. Ea depinde de statistica semnalului, adica de put. de auto-covariatie a semnalului.

Val. λ'_k sunt valorile proprii corespunzătoare (valorile) vectorilor proprii $\underline{y}_k$.

$$\underline{E} = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{y}_k^T \cdot K_u \cdot \underline{y}_k = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda'_k \underbrace{\underline{y}_k^T \cdot \underline{y}_k}_{=1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \lambda'_k = \text{suma } \text{eigen} \text{ valorilor proprii ale vectorilor din mat. } A \text{ care au fost înlocuiți.}$$

$$A = [\underline{y}_0 \underline{y}_1 \dots \underline{y}_{N-1}]^T$$

cu condiția: $\lambda'_0 > \lambda'_1 > \dots > \lambda'_{N-1}$

Obs.: ordinea vectorilor $\underline{y}_k$ este în ordinea descrescătoare a val. proprii ale vect $\underline{y}_k$ a.î. eroarea să fie minimă.

$$K_v = \frac{(\underline{v} - \bar{\underline{v}})(\underline{v} - \bar{\underline{v}})^T}{(A \cdot \underline{u} - A \cdot \bar{\underline{u}})^T \cdot (A \cdot \underline{u} - A \cdot \bar{\underline{u}})^T} =$$

$$= A \cdot (\underline{u} - \bar{\underline{u}}) \cdot (\underline{u} - \bar{\underline{u}})^T \cdot A^T = A \cdot K_u \cdot A^T$$

$$\text{dar } K_u \cdot A^T = K_u \cdot [\underline{y}_0 \underline{y}_1 \dots \underline{y}_{N-1}]$$

$$K_u \cdot A^T = \begin{bmatrix} K_u \cdot \underline{y}_0 & K_u \cdot \underline{y}_1 & \dots & K_u \cdot \underline{y}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{y}_0^T \cdot K_u & \underline{y}_1^T \cdot K_u & \dots & \underline{y}_{N-1}^T \cdot K_u \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \underline{y}_0^T \\ \vdots \\ \underline{y}_{N-1}^T \end{bmatrix}$$

$$A \cdot K_u \cdot A^T = \begin{bmatrix} \underline{y}_0^T \\ \vdots \\ \underline{y}_{N-1}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda'_0 \underline{y}_0 & \dots & \lambda'_{N-1} \underline{y}_{N-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda'_0 & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda'_{N-1} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

coef. în spațiul transformatei sunt perfect decorelați.

Tr. K.L nu se folosește în practică:

[ea nu este unică ci este specifică fiecărei clase de semnale.]

[nu există algoritmi rapizi pt. implementare]

În practică este înlocuită cu transf. suboptimale.

Pt. imagini - cea mai potrivită este tr. codinus discrete.

MORFOLOGIE MATEMATICĂ

- morfologie = știința formelor.

[preprocesarea imaginii = creșterea, etc.]

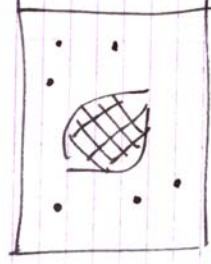
în 1-D - o formă poate arăta astfel



imagini binare - nivele $\{0, 1\}$ sau $\{0, 255\}$
 gri $\Rightarrow$ cele mai "clare" forme.
 color

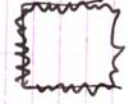
pt: 1-D : semnal (cu esantioane discrete de corobate)

pt: 2-D



- Imaginea nu mai este la fel de bine corelată.
 (sau chiar de loc)

- pt. un pixel - la sare și Piper, nu 3 o distribuție gaussiană

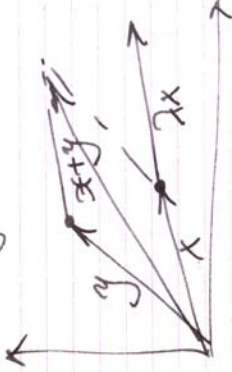


- pt. imagini binare - cu forme alterate
 nu pot fi filtrate cu filtre pe valori, ci cu filtre de formă.

- mulțimea punctelor $A \subset E$ - mulțimea tuturor punctelor

E = o mulțime dotată cu o structură topologică (faptul că un punct și vecinii săi); în plus considerăm că este un spațiu vectorial adică avem: $x+y$ sau λx

$x: (x_1, x_2)$
 $y: (y_1, y_2)$



- dacă avem o mulțime A , atunci..



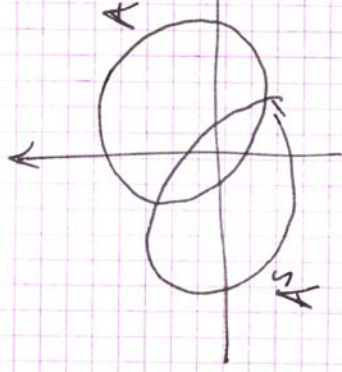
$$A_t = \{y \mid \exists x \in A: y = x + t\}$$

punct din plan



$A, \Rightarrow A^S$ = mulțimea simetrică lui A , în raport cu originea:

(CERN)



Minkowski - a
+ Hilbert
fost responsabil
creativitatea lui Einstein
(generalizată)

Articolul despre
relativitatea restrânsă
a fost scris de prima
lui verastă, de la care
l-a comparat.

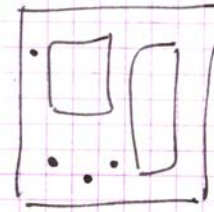
- În începutul sec. Minkowski - a introdus operații
cu mulțimi: $A+B$, $A-B$.

$$A+B = \{z \mid \exists a \in A, b \in B : z = a+b\}$$

$$A-B = \{z \mid \dots : z = a-b\}$$

- Matheron; Jean Serra.

- Dacă avem o imagine binară:



puncte + spații
New să se împartă

Obs: putem număra pixelii
și calcula ariile obiectelor
'din imagine - și apoi
să înlocuim obiectele de
arie mică.

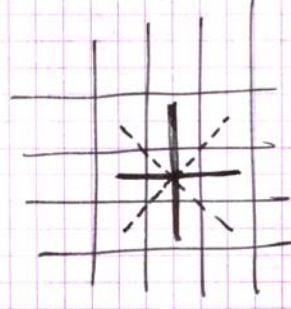
Bilature și erodare

- New o mulțime A = punctele din imagine = spațiu,
topologic
și o mulț. B - numită element structural

- erodarea (sau dilatarea) se pot face cu
elemente structurale diferite.

[- morfologia - pe mulțimi continue
imaginea fiind mulțimi discrete, oricât de
mare ar fi rezoluția.

- pixelii pot fi dispuși în rețea carteziană
sau în rețea hexagonală:



$$\text{---} = \text{vecinătate } \sqrt{4}$$

$$\text{---} + \text{---} = \sqrt{8}.$$

- în cazul continuu = vecinătatea = un disc

$$\|x - x_0\| < \varepsilon$$

- în rețea: $d(x_1, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$
 x_1, y = pixeli. (dist. pt. 8
vecini)

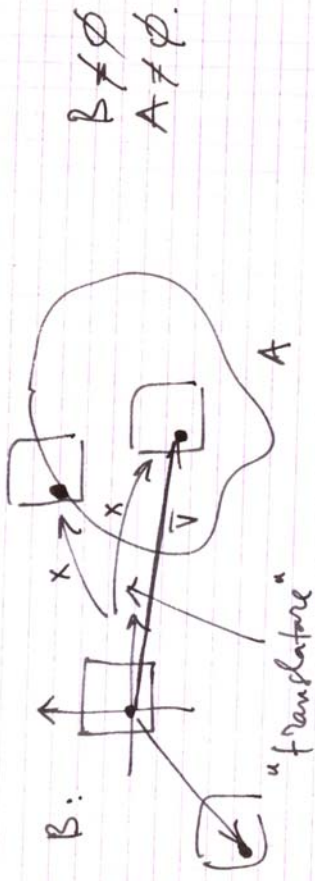
$$\text{sau } d_4 = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

Obs. după ordine obținem "erodată" mulțime A
prin elem. structural B .

erodată: $A \ominus B$

dilatată: $A \oplus B$.

$$A \oplus B =$$



- punctul $\bullet$ are calitatea cîi β -al transformator
cu vectorul de transformare, ε cuprins tot
în A .
(∇).

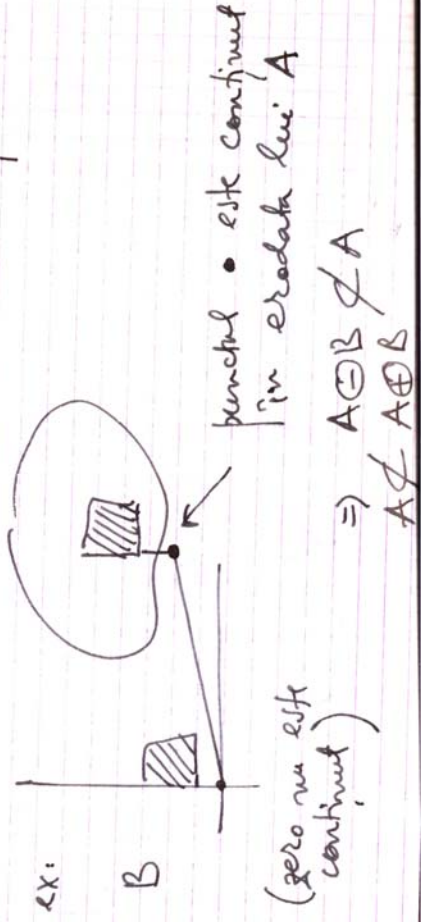
$$A \oplus B = \{x \mid B_x \subset A\}$$

$$A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \emptyset\}$$

dacă $B_X \subset A \Rightarrow$ un X care se găsește în
erodată lui A se găsește și în dilatarea
lui A .

$$\Rightarrow A \oplus B \subset A \oplus B.$$

der $A \oplus B \subset A$? Nu negativ.



$$\Rightarrow A \ominus B \neq A$$

Obs: dacă $0 \in B \Rightarrow A \oplus B \subset A$
 și $A \subset A \oplus B$.

- cat particular:



$$\Rightarrow A \oplus B = A + B$$

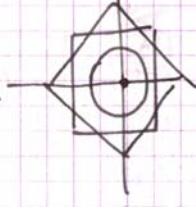


- B^s -symmetric

- dacă luăm un elem. structural în care $\text{fib}_\alpha \neq \emptyset$
origine $\Rightarrow B = B^S$

$$\Rightarrow A \oplus B = A + B = A + B$$

$$A \oplus B = A - B^c$$



- Obes: dilatarea și erodarea = operații duale.

$$C(A \oplus B) = C(A \ominus B)$$

- vai usar de experimento cu definitiva Jerra (Hatheson).

- definierea unei oratori $\Rightarrow$ un mecanism, care poate fi aplicat de mai multe ori!

$$(A \cap B) \ominus B$$

$$(A \oplus B) \oplus B \neq A$$

$$(A \oplus B) \ominus B \neq A$$

$\ominus$ și $\oplus$ nu sunt
operații inverse

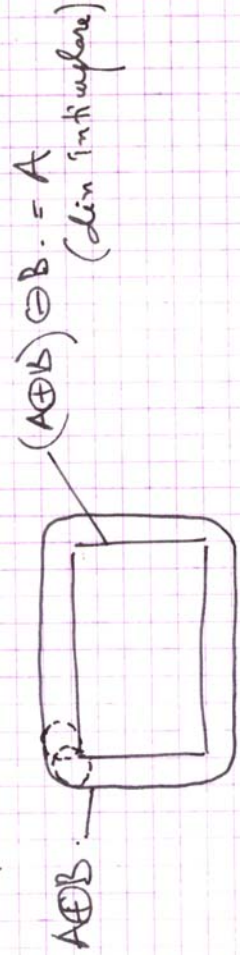
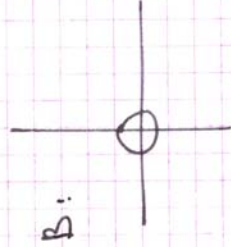
$(A \oplus B) \ominus B \stackrel{?}{=} A \cdot B$ - închiderea lui A
prin B

$(A \oplus B) \oplus B \stackrel{?}{=} A \cdot B$ - deschiderea lui A
prin B.

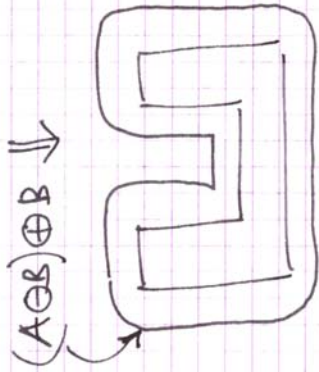
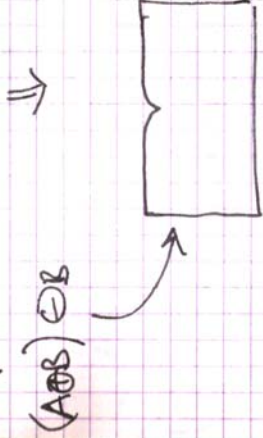
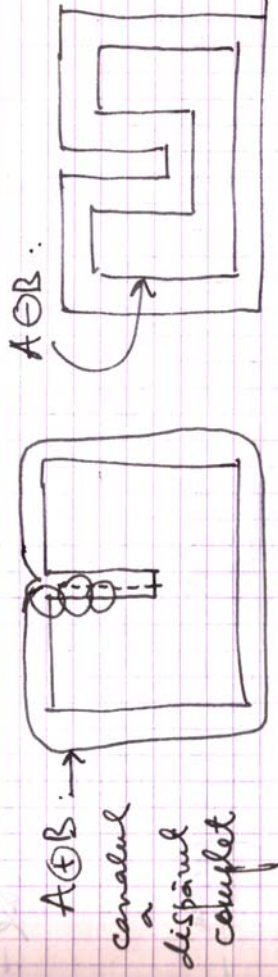
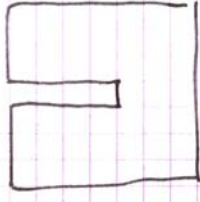
$$A \cdot B \subset A \subset A \cdot B$$

($\subset$ poate fi $\subseteq$)
dacă derivăm
face parte din B.

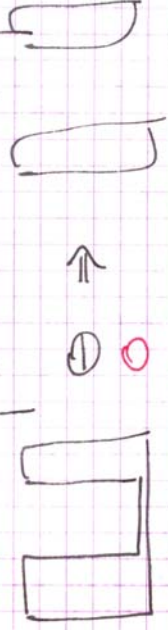
- un caz simplu: $B = B^s$!!



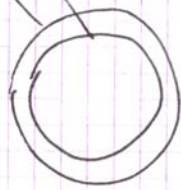
- alt caz:
mai îngust decât $2 \cdot A =$
diametrul elementului
structurii B.



- și la închidere și la deschidere - colțurile se netezesc.
- la închidere - canalele strâmte se unesc și dispar obiecte care erau separate (apare un obiect)
- la deschidere - istavurile strâmte dispar și apar 2 inbule → apar 2 obiecte.



obiectul de erodat



- - nu are nici un punct a.i. elementul structural să fie inclus în el.
- la erodare el va dispărea.

→ deschiderea este o operație cu care putem elimina punctele izolate.

închiderea - pune "include" canale.

$A \circ B \subset A$ - monotonie
 $A \circ B \supset A$ - monotonie.

obs.: o funcție monotonă și idempotentă s.m. filtrare.

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B$$

Definiții echivalente:

$$A \ominus B = \{x \mid B_x \subset A\} = \{x \mid x \in B \mid \exists a \in A \text{ a.i. } x = a - G\}$$

$$= \bigcap_{G \in B} A - G$$

$$A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \emptyset\} =$$

$$= \{x \mid \exists G \in B, \exists a \in A : x = a + G\}$$

$$= \bigcup_{G \in B} A - G$$

-G = inversul lui G.

Proprietăți:

- dualitatea:

$$C(A \oplus B) = C A \ominus B.$$

$$C(A \ominus B) = C A \oplus B.$$

- translație cu elementul structural (nu G).

$$A \oplus B_t = (A \oplus B)_t$$

$$B_t = B \text{ translatat cu } t.$$

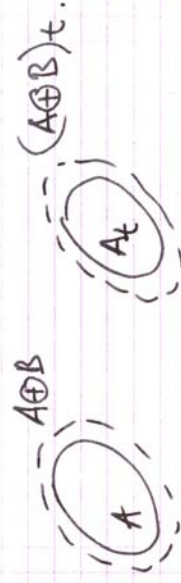
$$A \ominus B_t = (A \ominus B)_{-t}$$

- translația mulțimii A:

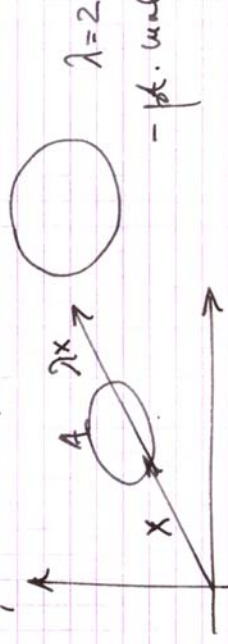
$$A_t = A \text{ translatat cu } t.$$

$$A_t \oplus B = (A \oplus B)_t$$

$$A_t \ominus B = (A \ominus B)_t$$



- mulțimea $\lambda \cdot A$, unde $\lambda = \text{real}$.



$$\frac{1}{\lambda}(\lambda A \oplus B) = A \oplus \frac{1}{\lambda} B$$

$$\frac{1}{\lambda}(\lambda A \ominus B) = A \ominus \frac{1}{\lambda} B$$

- monotonie:

$$A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_1 \oplus B \subset A_2 \oplus B$$

$$A_1 \ominus B \subset A_2 \ominus B.$$

$$\text{dacă } B_1 \subset B_2 \Rightarrow A \oplus B_1 \subset A \oplus B_2$$

$$A \ominus B_1 \supset A \ominus B_2 \quad !!$$

- dacă $0 \in B \Rightarrow A \subset A \oplus B$, altfel nu.
 $A \ominus B \subset A$.

- pseudo-comutativitate și asociativitate:

$$A \oplus B = (B \oplus A)^s$$

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C^s$$

$$(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C).$$

$$(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$$

$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$$

Obs. - dacă elem. structurant e mai complex, îl putem descompune în mai multe elemente.
 și aplicăm proprietățile de mai sus.

$$(A \cap B) \ominus C = (A \ominus C) \cap (B \ominus C).$$

$$A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C).$$

$$A \oplus (B \cap C) \subset (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$$

$$A \ominus (B \cap C) \supset (A \ominus B) \cup (A \ominus C).$$

$$(B \cap C) \oplus A \subset (B \oplus A) \cap (C \oplus A)$$

$$(B \cap C) \ominus A \supset (B \ominus A) \cap (C \ominus A).$$

CORECTURĂ:

$$\begin{cases} A \circ B = (A \oplus B) \oplus B^s \\ A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B^s \end{cases}$$

$$C(A \circ B) = C A \bullet B$$

$$C(A \bullet B) = C A \circ B.$$

$$A \circ B \subset A \subset A \bullet B - \text{valabil } \forall A.$$

idempotență: $(A \circ B) \circ B = A \circ B$
 $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B.$

- translație:

$$A_t \circ B = (A \circ B)_t \quad \circ = \text{deschis}$$

$$A_t \bullet B = (A \bullet B)_t \quad \bullet = \text{închis}$$

$$\frac{1}{\lambda}(A \circ B) = A \circ \frac{1}{\lambda} B.$$

- wavelet = 2 grade de libertate : translația și scalarea.
- are o bază numărabilă și tot funcțiile L^2 din $\mathbb{R}$.

Operații morfologice de cântărire

- un cântărire interior $\delta A = A - (A \ominus B)$

$B =$ poate fi un cerculeț.

- cântărire exterior $\Delta A = (A \oplus B) - A$

- gradientul morfologic:

$$\text{grad } A = (A \oplus B) - (A \ominus B)$$



→ procesul se poate paraleliza

Obs: 3 metode cu altele
procesare câte pixeli are
imaginea.

Morfologie mat. pt. semnale 1D

- morf. mat. pt. imagini cu nivele de gri.

Obs: morf. poate fi aplicată și pt. imagini 3-D.



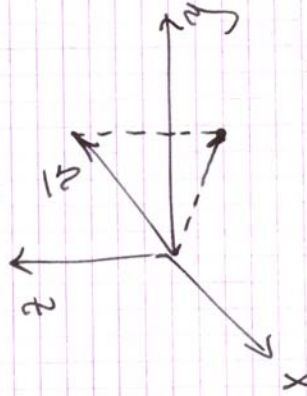
$$\frac{1}{\lambda}(\lambda A \cdot B) = A \cdot \frac{1}{\lambda} B$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_1 \circ B \subset A_2 \circ B \quad A_1 \cdot B \subset A_2 \cdot B \\ B_1 \subset B_2 \Rightarrow A \circ B_1 \supset A \circ B_2 \quad A \cdot B_1 \subset A \cdot B_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \circ B = \bigcup B_x \\ B_x \subset A \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot B = \bigcap B_x \\ B_x \cap A \neq \emptyset \end{array} \right.$$

ex. de operații idempotente: proiectia



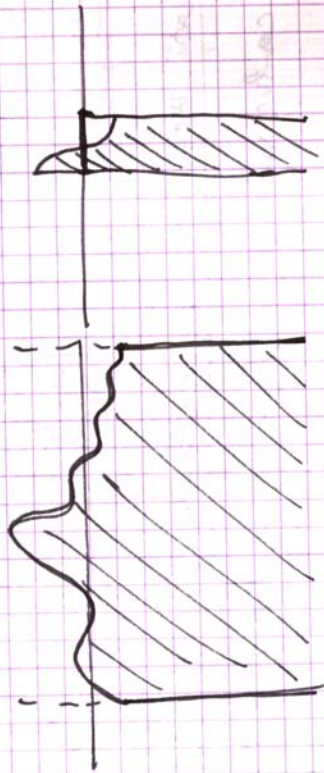
Filtre alternate saccentiale

$$(((A \circ B) \cdot B) \circ 2B) \cdot 2B) \circ 3B \dots$$

Obs. pt. wavelette - au un grad de libertate în plus față de funcțiile clasice
"sin" și "cos".

- suport compact = intervalul pe care sunt $\neq 0$.

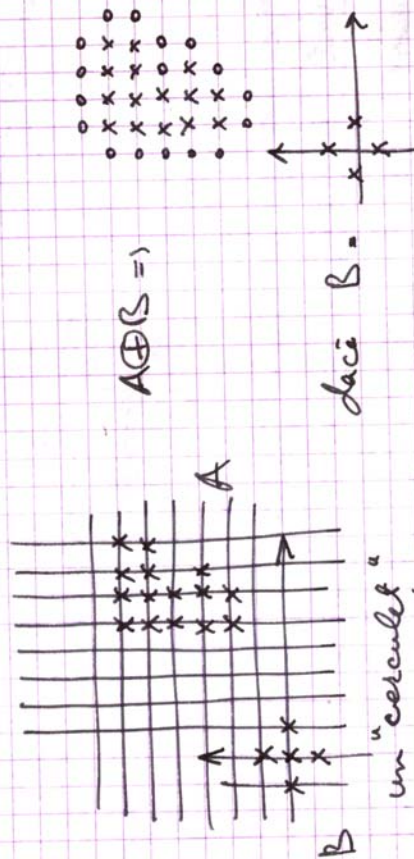
- funcția 1-D se pune în corelație cu
multimea 2-D: (fianivoc)



și alegem elementul structurant.

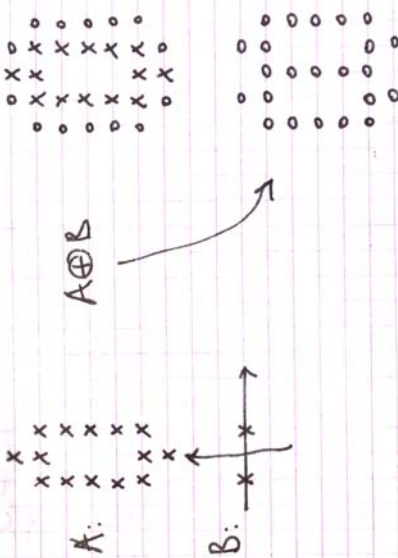
caz particular: B: — - identică cu 0.

Ex. morfologie discret.



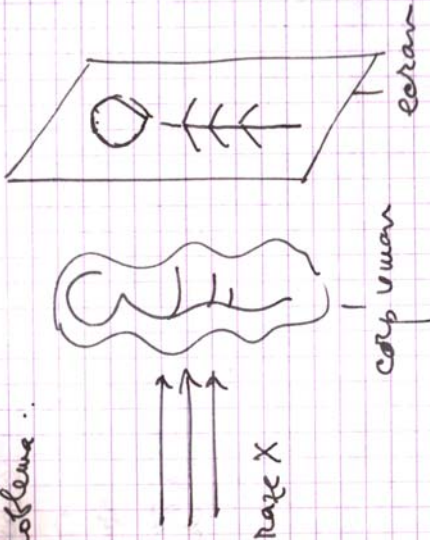
un "cerușet" care conține originea

44
punctul acesta nu va mai fi



REFACEREA IMAGINILOR DIN PROIECTII

Problema:



$$dI = I(u+du) - I(u) = k \cdot du$$

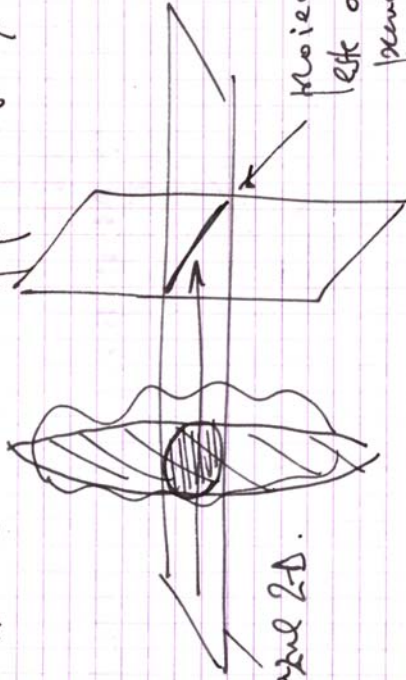
transmisie de absorbție: $k = k(u)$ densitate de material

$$\frac{dI}{I} = -k \cdot du \quad u_1 \quad - \text{dacă } k = \text{constant}$$

$$I = I_0 \cdot e^{-\int_{u_0}^{u_1} k \cdot du} \quad \text{dacă nu} \Rightarrow \int$$

$$a = \ln \frac{I_0}{I} = \int_{u_0}^{u_1} k(u) du.$$

- pe ecran se vede ceva proporțional cu atenuarea a
- vrem să vedem de fapt o secțiune

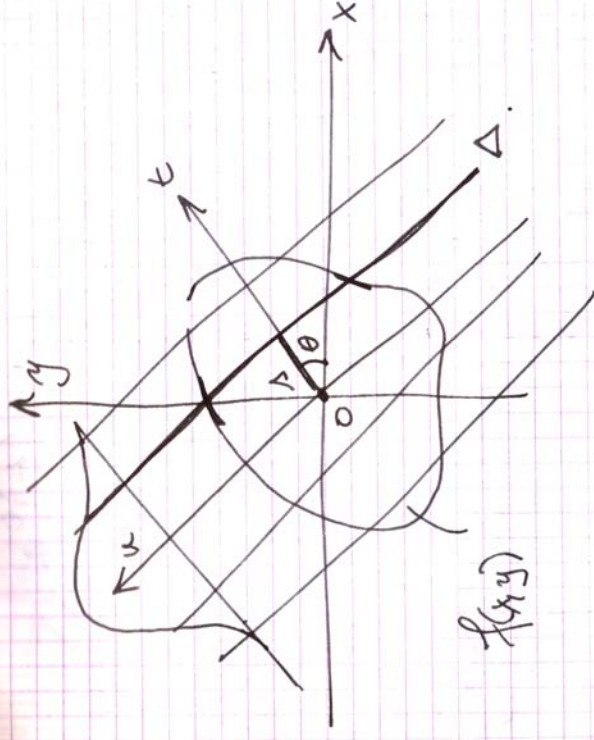
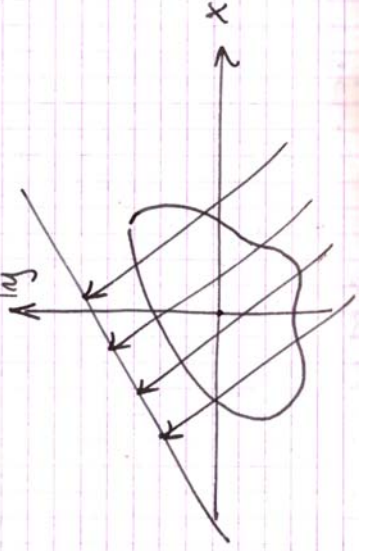


cazul 2D.

Proiecția în cazul 2D
Este o linie cu
puncte de diferență
intensității.



și vrem să aflăm valoarea (toate val.)
punctelor din



Transformata Radon.

Tr. Radon a lui $f(x, y)$: $Rf = g = g(\Delta, \theta)$

pt. dreapta Δ : ec. dreptei:

$$x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta - \Delta = 0.$$

$$(x \cdot \cos \theta)$$

$$g(\Delta, \theta) = \iint f(x, y) \cdot \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \Delta) dx dy.$$

scriem coordonatele lui Δ, θ în t, u :

$$\begin{cases} t = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta \\ u = -x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g = \iint_{\mathbb{R}^2} f(t-u) \cdot f(t \cos \theta - u \sin \theta, t \sin \theta + u \cos \theta) \cdot dt \cdot du$$

Integralu in rap. cu t^a uai in t^b

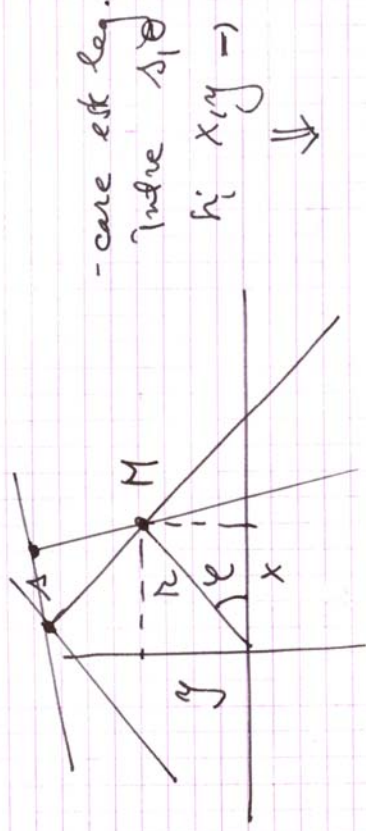
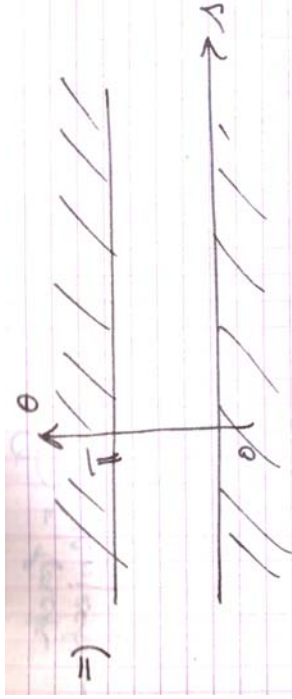
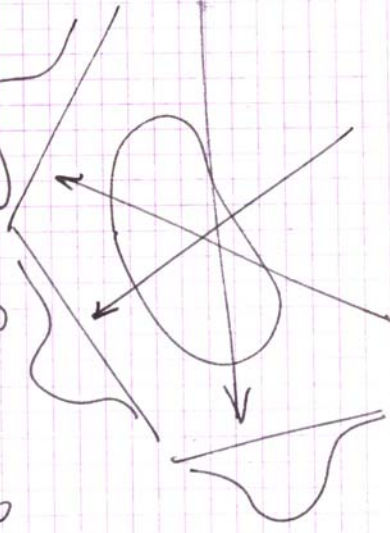
$$= \int_{\mathbb{R}} f(A \cdot \cos \theta - u \sin \theta, A \cdot \sin \theta + u \cos \theta) du$$

f - ii corespunde lui k din problema intensitatii la t^a (i).

A - variati de la $-\infty$ la $+\infty$
 $\theta = 0, \pi$

$$g(A, \theta) = g(-A, \theta + \pi)$$

$$g(A, \theta) = g(A, \theta + 2\pi)$$



- care este leg.
 între Δ, θ
 $h_i(x, y)$

$$x = R \cdot \cos \varphi$$

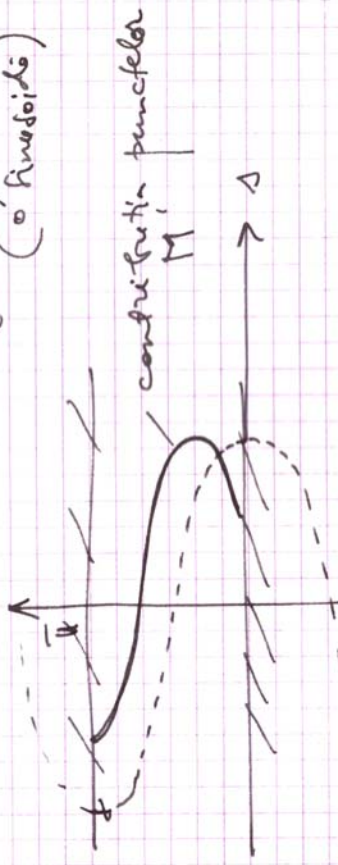
$$y = R \cdot \sin \varphi$$

$$x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta - \Delta = 0$$

$$R \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta + R \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta - \Delta = 0$$

$$R \cdot \cos(\theta - \varphi) = \Delta$$

(o sinusoida)



$$\hat{f}(x, y) = \int_0^\pi g(x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta, \theta) d\theta$$

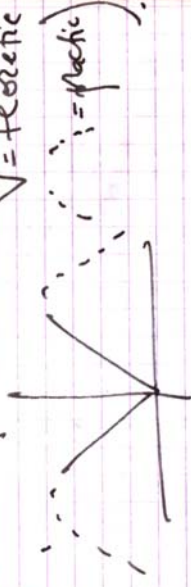
$$R \cdot \cos \varphi \cdot \cos \theta + R \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta$$

iar $\hat{f}(x, y) = Bg$ unde $B = \text{back projection operator}$

$\hat{f}(x, y)$ - este aproape ce ne trebuie

si este necesara o filtrare TS μ .
a se obtine $\hat{f}(x, y)$

(cu un filtru μ) $N = \text{teoretic}$
 $i = \text{practic}$



+ teorema proiectiei
+ Segmentare.